

1er material de estudio GEOMETRÍA PRE 2024-1

Nociones Básicas

01. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. La unión de dos regiones cuadradas es un conjunto convexo.
- II. Si la unión de dos conjuntos es un conjunto convexo, entonces uno de los dos conjuntos es necesariamente un conjunto convexo.
- III. El interior de todo ángulo es un conjunto convexo.

- A) VVF B) VFV C) VVV
D) FFV E) VFF

02. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. A, B, C y D son vértices de un cuadrilátero, entonces el conjunto $P = \{A, B, C, D\}$ es un conjunto convexo.
- II. Todo conjunto de dos elementos, es conjunto convexo.
- III. La intersección de una región triangular con una circunferencia siempre es un conjunto convexo.
- IV. La unión de una región cuadrada y una región triangular que tienen un lado común es un conjunto convexo.

- A) VFVF B) FFVF C) FFFF
D) VVVF E) VVFF

03. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. El interior de una circunferencia, es un conjunto convexo.
- II. El segmento de recta es un conjunto convexo.
- III. La semirrecta es un conjunto no convexo.
- IV. El punto es un conjunto convexo.

- A) VFVF B) FFFV C) VVVV
D) VVVF E) FVFF

04. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. La intersección de una recta y una región cuadrangular determinada por un cuadrilátero no convexo, siempre es un conjunto no convexo.
- II. Alguna unión de dos rayos, es un conjunto convexo.
- III. La unión de dos rectas secantes es un conjunto convexo.
- IV. Si se omite un punto en una recta, entonces el conjunto de puntos restantes es un conjunto convexo.

- A) FVFF B) FVVF C) VVVF
D) VVVF E) VFVF

05. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si C_1 y C_2 son dos conjuntos convexos, entonces $C_1 \cap C_2$ es un conjunto convexo.
- II. Todo punto de una recta separa a la recta en dos conjuntos no vacíos, llamados semirrectas.
- III. Si la intersección de dos conjuntos no es un conjunto convexo, entonces

ninguno de los dos es un conjunto convexo.

- IV. Toda recta contenida en un plano separa al plano en dos conjuntos no vacíos, llamados semiplanos.

- A) VFVF B) FFFV C) VVVV
D) VVFFV E) FVFF

Segmentos

06. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D de tal manera que $AC = 22$ m, $BD = 25$ m y $AD = 33$ m. Calcule la longitud (en m) de $\overline{BC}$.

- A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

07. Sean los puntos consecutivos de una recta: A, B, C, D y E. Si $AC + BD + CE = 55$ m y $3BD = 2AE$, entonces la longitud (en m) de $\overline{AE}$ es

- A) 33 B) 30 C) 27
D) 35 E) 22

08. Sean los puntos A, B y C tal que $A - B - C$. Si $AB = 22$ m y $BC = 16$ m, entonces la longitud (en m) del segmento determinado por los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es

- A) 5 B) 7 C) 9
D) 8 E) 10

09. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si $A - C - B$ entonces para todo punto D, $\overline{AB} \cap \overline{CD}$ es un conjunto convexo.

- II. $\overline{BC} - \{B; C\}$ es conjunto convexo.

- III. Si A, B y C son colineales, entonces $A - B - C$.

- A) VFV B) VVF C) VFF
D) FFV E) FFF

10. Sean los puntos consecutivos A, B, C, D y E tales que las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$ se encuentran en progresión aritmética y $DE - BC = 22$ m y $AD = 99$ m. Calcule la longitud (en m) de $\overline{AE}$.

- A) 152 B) 154 C) 156
D) 158 E) 160

Ángulos

11. Indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

- I. La bisectriz de un ángulo esta contenido en el interior de un ángulo.
II. Dos ángulos congruentes que formen un par lineal son ángulos rectos.
III. Si dos ángulos son suplementarios entonces forman un par lineal.

- A) FFF B) FVF C) VFV
D) FVV E) FFV

12. Sean $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$ ángulos consecutivos de modo que $\overline{ON}$ es bisectriz del ángulo COD y $\overline{OM}$ es bisectriz del ángulo AOB, $m\angle MON = 80$ y $m\angle BOD = 100$. Calcule la medida del ángulo AOC.

- A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 70

13. En el interior del $\angle AOD$ se ubican los puntos M, N, T y Q tal que $\angle AOM$, $\angle MON$, $\angle NOT$, $\angle TOQ$ y $\angle QOD$ ángulos consecutivos y sus medidas están en

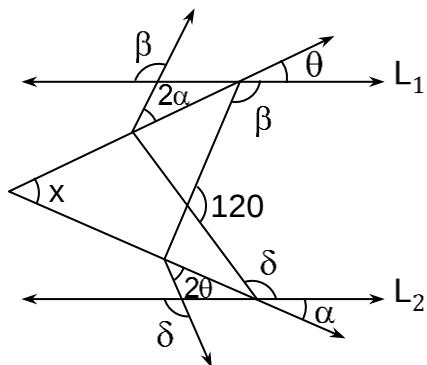
progresión aritmética, calcule el mayor valor entero de la razón.

- A) 16 B) 17 C) 18
D) 35 E) 24

14. Dos ángulos conjugados internos, determinados entre dos rectas paralelas, miden θ y $n\theta$ donde n es entero y menor que 5. Calcule la suma de valores de θ .

- A) 213 B) 118 C) 112
D) 231 E) 233

15. En la figura mostrada, $L_1 \parallel L_2$ calcule el valor de x .



- A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 60

Triángulos

16. En los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, de un triángulo ABC , se ubican los puntos M y N respectivamente tal que $AM = MN = BN$. Si $m\angle BAC = 50$, $m\angle AMN = 140$ y $MN > NC$, entonces la medida del ángulo ACB es

- A) 60 B) 50 C) 40
D) 30 E) 20

17. En los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, de un triángulo ABC obtuso en B , se ubican los puntos D y E respectivamente, tal que los ángulos ABC

y ADE son suplementarios. Si $ED = 6$ u y $CD = 8$ u, entonces el valor par de la longitud (en u) de $\overline{EC}$ es

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

18. En el exterior y relativo al lado BC de un triángulo ABC se ubica el punto P ; en las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos R y Q respectivamente tal que $m\angle RBQ = 2(m\angle BCP)$, $m\angle PCQ = 2(m\angle CBQ)$ y $m\angle BAP = 2(m\angle PAC)$. Si $m\angle APC + m\angle BQA = 90$, entonces la medida del ángulo PAC es

- A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 15

19. El perímetro de un triángulo escaleno es k , ¿Entre qué valores está comprendido la longitud del mayor de los lados?

- A) $\left\langle \frac{k}{3}; \frac{k}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{k}{3}; k \right\rangle$
C) $\left\langle \frac{k}{2}; k \right\rangle$ D) $\left\langle \frac{k}{2}; 2k \right\rangle$
E) $\left\langle \frac{k}{3}; 2k \right\rangle$

20. En el interior de un triángulo ABC , se ubican los puntos P y Q , tal que los ángulos BAP , PAQ y CAQ son congruentes, los ángulos ACP , PCQ y QBC también son congruentes y $\overline{AQ} \cap \overline{CP} \neq \emptyset$. Si las medidas de los ángulos ABC , APC y AQC miden α , β y θ respectivamente, entonces la relación correcta es

- A) $\alpha + \beta - \theta = 180$
B) $\beta + \theta - \alpha = 180$
C) $\theta - \alpha - \beta = 180$

D) $2\alpha = \beta + \theta$

E) $3\alpha = \beta + \theta$

21. En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, en el lado $\overline{BC}$ se ubica el punto P tal que $AP = BC$. Si $m\angle PAC > m\angle PAB$, entonces el mayor valor entero de la medida del ángulo PAB es

- A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28

22. En un triángulo ABC obtuso en B. Si $m\angle BAC = 2m\angle BCA$, $AB = 4$ u, entonces el mínimo valor entero de la longitud (en u) de $\overline{BC}$ es

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

23. En un triángulo ABC, en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q tal que $AB = AQ$ y $BC = CP$. Si $AP = 3$ u y $CQ = 4$ u, entonces el menor valor entero de la longitud (en u) de $\overline{AC}$ es

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

24. En un triángulo ABC equilátero, exterior y relativo al lado $\overline{BC}$ se ubica el punto D. Si $\overline{BD} \cong \overline{AB}$, entonces la medida del ángulo ADC es

- A) 45 B) 50 C) 60
D) 30 E) 15

25. En un triángulo isósceles, el perímetro es mayor que tres veces la longitud de la base. Calcule el menor valor entero de la medida de uno de los ángulos internos congruentes.

- A) 31 B) 46 C) 61
D) 65 E) 71

Líneas Notables

26. En un triángulo ABC, $m\angle ABC = 4\theta$, se trazan las bisectrices interiores $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$, además las bisectrices de los ángulos AQC y APC que se intersectan en D. Entonces la $m\angle PDQ$ es

- A) θ B) $45 - \theta$ C) 2θ
D) $45 + \theta$ E) $30 + \theta$

27. En un triángulo escaleno ABC, $m\angle BAC = 60$, se trazan las bisectrices exteriores $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ encontrándose D y E en las prolongaciones de $\overline{AC}$ y $\overline{BA}$ respectivamente. Entonces la diferencia de las medidas de los ángulos D y E es

- A) 0 B) 5 C) 10
D) 15 E) 30

28. En un triángulo isósceles ABC, $AB = AC$, la bisectriz exterior del ángulo B intersecta a la prolongación del lado $\overline{AC}$ en E. La mayor medida entera del ángulo BEC es

- A) 40 B) 41 C) 42
D) 43 E) 44

29. En un triángulo ABC, $m\angle BAC = 48$ y $m\angle A < m\angle C$, se traza la mediatriz de la bisectriz exterior $\overline{BS}$ que intersecta a la prolongación de $\overline{BC}$ en P. La $m\angle PSC$ es

- A) 24 B) 36 C) 42

D) 48 E) 60

30. En un triángulo ABC, $m\angle A = 32$ y $m\angle C = 24$. Calcule la diferencia entre las medidas del mayor y menor ángulo que determinan las rectas que contienen a la bisectriz interior $\overline{BS}$ y a la altura $\overline{AH}$.

A) 116 B) 118 C) 122
D) 124 E) 128

Congruencia de Triángulos

31. Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Dos triángulos equiláteros son congruentes.
- II. Dos triángulos rectángulos isósceles son congruentes.
- III. En un triángulo isósceles, las alturas no relativas a la base, son congruentes.
- IV. En un triángulo, los segmentos que tienen por extremos los puntos medios de los lados, determinan cuatro triángulos congruentes.

A) VVVV B) VVFF C) VFFV
D) FFVV E) FFVF

32. En un triángulo rectángulo isósceles ABC, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, en el interior se ubica el punto F, tal que $BF = 15$ u, $CF = 23$ u y $m\angle BFC = 90$. Calcule la longitud (en u) de $\overline{AF}$.

A) 16 B) 17 C) 18
D) 20 E) 21

33. En un triángulo isósceles ABC, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, exterior y relativo al lado $\overline{AC}$ se ubica el punto D, tal que, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Si $m\angle ADC =$

38 y $m\angle DAC = 33$, entonces la medida del ángulo ABC es

A) 36 B) 34 C) 38
D) 42 E) 44

34. En un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica el punto D, tal que, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Si $m\angle ABC = 130$ y $m\angle ACB = m\angle CBD - m\angle ABD$, entonces la medida del ángulo CBD es

A) 71,5 B) 56,5 C) 60
D) 63,5 E) 77,5

35. En un triángulo equilátero ABC, en $\overline{AC}$ se ubica el punto D y en el exterior, relativo a $\overline{AC}$, se ubica el punto E, tal que el triángulo DCE es equilátero. Si $m\angle ABD = 26$, entonces la medida del ángulo EAC es

A) 26 B) 28 C) 32
D) 34 E) 36

36. En un triángulo ABC equilátero, Q es un punto interior. Si $m\angle QBC = \alpha$, $m\angle QAB = 2\alpha$ y $m\angle QCA = 3\alpha$, entonces el valor de α es

A) 10 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

37. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BQ}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{QC}$. Si $m\angle BAC = 4m\angle BCA = 8\angle QBC = 8\theta$, entonces la medida del ángulo QBA es

A) 65 B) 70 C) 75
D) 80 E) 85

38. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{AM}$ ($M \in \overline{BC}$). Si $m\angle ACB = 2m\angle MAC$ y $m\angle BAM = 30$, entonces la medida del ángulo ABC es

A) 120 B) 110 C) 105
D) 115 E) 125

39. En un triángulo isósceles ACB ($\overline{AC} \cong \overline{BC}$), $m\angle ACB = 20$. Si se traza la ceviana $\overline{BD}$, tal que, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces la medida del ángulo DBC es

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

40. En un triángulo ABC ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$), se ubica el punto P en la prolongación del lado $\overline{AC}$. Si $BP = AC$ y $2m\angle BAC - m\angle BPC = 60$, entonces la medida del ángulo ABC es

A) 60 B) 75 C) 90
D) 100 E) 120

Aplicaciones a la Congruencia

41. En un triángulo ABC, recto en B, en el exterior y relativo al lado $\overline{BC}$ se ubica el punto F, tal que BFC es un triángulo equilátero. Si $AF = 18$ u, entonces la longitud (en u) del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BF}$ es

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

42. En un triángulo isósceles ABC, $AB = BC$, M es un punto de su interior tal que $AB = BC = MC$. Si $m\angle MAC = 30$ y $m\angle MCA = 25$, entonces la medida del ángulo ABC es

A) 110 B) 100 C) 104
D) 106 E) 112

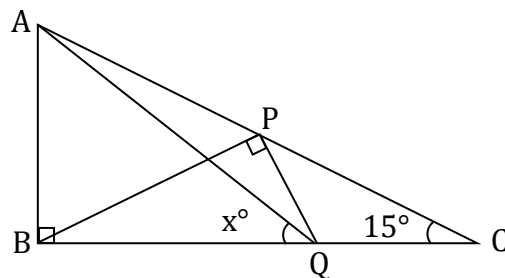
43. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y en el triángulo ABM se traza la altura $\overline{BH}$. Si $AB = 12$ m y $m\angle BAM = 2m\angle MAC$, entonces la longitud (en m) de $\overline{HM}$ es

A) 3 B) 2 C) 4
D) 6 E) 9

44. En un triángulo ABC, se ubica un punto interior P tal que $m\angle ABP = 20$, $m\angle PBC = 100$, $m\angle BCP = 30$ y $m\angle PCA = 10$. Calcule la medida del ángulo PAC.

A) 5 B) 10 C) 20
D) 12 E) 15

45. En la figura, $AP = PC$. Calcule el valor de x.



A) 18 B) $\frac{37}{2}$ C) $\frac{53}{2}$

- D) $\frac{45}{2}$ E) 30

46. En un triángulo ABC, se trazan la bisectriz interior $\overline{AD}$ y en el lado $\overline{AB}$ se ubica el punto medio M tal que $m\angle ADM = 90^\circ$. Calcule la razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

- A) 2,0 B) 2,5 C) 3,0
D) 3,5 E) 4,0

47. En un triángulo ABC, $AB = 6$ u, $BC = 8$ u y $AC = 12$ u, calcule la distancia (en u) entre los pies de las perpendiculares trazadas desde el vértice B, a las bisectrices de los ángulos exteriores A y C.

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

48. En un triángulo ABC, acutángulo, se trazan la altura BH y la mediana AM. Si $BC = 2(AH)$ y $m\angle HBC = 3m\angle MAC$, entonces la medida del ángulo MAC es

- A) 10 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

49. En un triángulo ABC, la bisectriz del ángulo ABC interseca a la mediatriz del lado AC en el punto P. Se traza PQ, perpendicular a BC (B - Q - C). Si $AB = 5$ u y $BC = 13$ u, entonces la longitud (en u) de QC es

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

50. En un triángulo ABC, se traza la mediana BM. Si $BC = 2(BM)$ y $m\angle ABM = 70^\circ$, entonces la medida del ángulo MBC es

- A) 20 B) 30 C) 40
D) 45 E) 60

Triángulos Rectángulos Notables

51. En un triángulo ABC, en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos D, E y F, y en $\overline{BD}$ el punto medio M tal que el ángulo DEB es recto y el ángulo BCA mide 45° . Si $BD = EF$ y $AM = MF$, entonces la medida del ángulo EFM es

- A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75

52. En un triángulo isósceles ABC, en los lados congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q, y en el lado $\overline{AC}$ los puntos M y N tal que los ángulos AMP y CNQ son rectos y el ángulo ABC mide 30° . Si $2(PM + QN) = AC = 12$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{MN}$ es

- A) 3 B) 4 C) 6
D) $6\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

53. En un triángulo ABC, recto en B, en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos D y E, y en el lado $\overline{AC}$ los puntos P y Q tal que los ángulos APD y CQE miden 45° y $PD = QE$. Si $QC = \sqrt{3}(AP)$, entonces la medida del ángulo BAC es

- A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75

54. En un triángulo isósceles ABC, recto en B, en la mediatriz de $\overline{BC}$ se ubica el punto P interior al triángulo tal que el ángulo PCA mide 30° . ¿Cuánto mide el ángulo BAP?

- A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75

55. En un triángulo ABC, el ángulo ABC mide 105° y $AB = \sqrt{2}(BC)$. ¿Cuánto mide el ángulo BAC?

- A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75

Polígonos

56. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Todo polígono es un conjunto convexo.
II. Un polígono es regular si es equiángulo y equilátero a la vez.
III. Si dos polígonos son isoperimétricos, entonces dichos polígonos tienen igual número de lados.

- A) FVV B) FVF C) FFF
D) VVF E) FFV

57. En un polígono regular, los $\frac{5}{2}$ de la medida de un ángulo interior es igual al cuadrado de la medida de un ángulo exterior. Calcule el número de lados del polígono.

- A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 20

58. La diferencia de los números de lados de dos polígonos regulares es 4 y la diferencia de las medidas de los ángulos externos es 3° . Calcule el número de lados de uno de ellos.

- A) 18 B) 21 C) 22
D) 24 E) 30

59. En un polígono regular ABCDEF... , la mediatriz de $\overline{EF}$ es paralela con la diagonal de $\overline{AE}$. Calcule la medida del ángulo externo del polígono.

- A) 40 B) 30 C) 45
D) 60 E) 36

60. En un campeonato de ajedrez participaron A ajedrecistas, si se sabe que $(A - 4)$ ajedrecistas jugaron 5A partidas. Calcule el número total de partidas jugadas durante el campeonato.

- A) 54 B) 57 C) 60
D) 63 E) 66

61. Las medidas de los ángulos interiores de un polígono convexo están en progresión aritmética cuya razón es r. Si el número de diagonales es igual al triple del número de lados, entonces el mayor valor entero de r es

- A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

62. En un polígono convexo de n lados, desde $(n - 7)$ vértices consecutivos se han trazado $(3n - 4)$ diagonales, luego el número de diagonales medias es

- A) 51 B) 52 C) 53
D) 54 E) 55

63. La suma de las medidas de k ángulos interiores consecutivos de un polígono convexo es S. Calcule la diferencia de la suma de las medidas de los ángulos

exteriores no adyacentes con estos ángulos interiores y la suma de las medidas de los ángulos exteriores adyacentes con dichos ángulos interiores.

- A) $S + 180(2 - k)$
- B) $2S + 180(1 - k)$
- C) $2S + 360(2 - k)$
- D) $S + 360(1 - k)$
- E) $2S + 360(1 - k)$

64. En un polígono regular ABCDE.... la $m\angle BCE = 2m\angle CED + 90$. Calcule el número de lados del polígono.

- A) 8 B) 9 C) 10
- D) 11 E) 12

65. En un polígono convexo y equiángulo la razón de la medida de un ángulo interior y la medida de un ángulo exterior es k . Calcule el número de diagonales del polígono.

- A) $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ B) $\frac{(k-1)(k+1)}{2}$
- C) $\frac{(k+1)(k)}{2}$ D) $\frac{(2k+1)(k+2)}{2}$
- E) $(k+1)(2k-1)$

Cuadriláteros

66. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. En un trapezoide, las diagonales son perpendiculares y congruentes.
- II. En el cuadrilátero ABCD, no convexo en D, $AB + BC > AD + DC$
- III. En un trapezoide simétrico, dos ángulos opuestos son congruentes.

- A) FFV B) FVV C) VFF
- D) VVV E) FVF

67. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. En un trapecio, si un segmento es perpendicular a las bases, entonces dicho segmento es altura.
- II. En algún trapecio, una diagonal puede ser altura del trapecio.
- III. En un trapecio, si las diagonales son congruentes, entonces es un trapecio isósceles.

- A) VVF B) FVF C) VFF
- D) FVV E) VVV

68. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si en un paralelogramo, los pares de ángulos conjugados internos son congruentes, entonces es un rombo.
- II. En un cuadrado, todos los puntos que pertenecen a una diagonal equidistan de los vértices que no pertenecen a esta diagonal.
- III. En el rectángulo y el cuadrado, el punto de intersección de las sus respectivas diagonales equidista de los vértices.

- A) VVV B) VFV C) FVV
- D) FFF E) VVV

69. En un trapezoide ABCD, si $BC = CD$, y $AD = AB + BC$ y la medida del ángulo ADC es 60, entonces la medida del ángulo ABC es

- A) 45 B) 60 C) 105
- D) 120 E) 150

70. En un trapezoide simétrico, calcule la razón entre el perímetro y la suma de distancias del punto de intersección de las diagonales hacia los puntos medios de los lados.

- A) 1:2 B) 2:1 C) 3:2
D) 5:4 E) 3:4

71. En un trapezoide ABCD; $m\angle A = m\angle C = 90$, $m\angle B = 3(m\angle D)$. Si $BD = 12$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AC}$ es

- A) 6 B) $6\sqrt{3}$ C) 9
D) 12 E) $6\sqrt{2}$

72. Sean los rectángulos congruentes ABCD y DEFG, tal que, C-E-D y A-D-G. Si la recta que contiene a los puntos de intersección de las diagonales de ambos rectángulos contiene a E, entonces la razón de las longitudes de dos lados consecutivos de uno de los rectángulos es

- A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2} - 1$
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

73. En un rombo ABCD, en $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N tal que B-M-N y M-N-C, $BC = 4(BM) = 2(NC)$; por M se traza una recta paralela a $\overline{AB}$ que interseca a $\overline{AN}$ en P. Si $AC = 16$ u, entonces la distancia (en u) de P a $\overline{BD}$ es

- A) $3/2$ B) 4 C) 1
D) 3 E) 2

74. En un trapezoide de diagonales congruentes y perpendiculares, calcule la medida del ángulo que determina una recta que contiene a los puntos medios de dos lados opuestos, con una de las diagonales.

- A) 30 B) 75 C) 45
D) 60 E) 22,5

75. Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Si las diagonales de un cuadrilátero convexo se bisecan, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
II. Si las diagonales de un trapecio son congruentes, entonces el trapecio es isósceles.
III. En un trapezoide, al unir los puntos medios de los cuatro lados de manera consecutiva, se determina un paralelogramo.

- A) VVF B) VFV C) FVF
D) FFV E) VVV

76. En un paralelogramo ABCD, en la diagonal $\overline{AC}$ se ubica el punto P, tal que $m\angle APB = 2m\angle CPD$. Si $AP = PB = 6$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{PC}$ es

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 12

77. En un cuadrado ABCD, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica el punto P, tal que $\overline{BP}$ interseca a la diagonal $\overline{AC}$ en el punto E y $BE = PD$. ¿Cuál es la medida del ángulo PEC?



- A) 53 B) 60 C) 74
D) 75 E) 90

78. En un paralelogramo ABCD, en el lado $\overline{CD}$ se ubica el punto medio M y en $\overline{BM}$ se ubica el punto P, tal que el ángulo ADP sea recto. Si $BP + 2(PM) = 12$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AP}$ es

- A) 3 B) 4 C) 6
D) 9 E) 12

79. En el trapecio ABCD, en la base mayor $\overline{AD}$ se ubican los puntos P y Q tal que $A-Q-P$; $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ son bisectrices de los ángulos ABC y BCD. Si $AB + CD = 6$ u y $BC + AD = 4$ u, entonces la longitud (en u) del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ es

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

80. En un trapecio isósceles ABCD, de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, en la prolongación $\overline{BA}$ se ubica el punto P, tal que el ángulo ACD sea recto y $DP = 2(AC)$. ¿Cuánto mide el ángulo BPD?

- A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75

Circunferencia

81. Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. En toda circunferencia, a cuerdas congruentes le corresponden arcos congruentes.
- II. En toda circunferencia, las cuerdas congruentes equidistan del centro.
- III. Las rectas tangentes interiores comunes, trazadas a dos

circunferencias exteriores y el segmento que une los centros, son concurrentes.

- A) VFV B) VVF C) VVV
D) FVV E) FFV

82. Desde un P, exterior a una circunferencia, se traza la recta tangente $\overline{PT}$ (T punto de tangencia) y la secante diametral PBA. Si $m\angle APT = 20$, entonces la medida del ángulo PAB es

- A) 20 B) 30 C) 35
D) 40 E) 18

83. Desde un P, exterior a una circunferencia, se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ (A y B puntos de tangencia), y el diámetro $\overline{AT}$. Si el segmento OP (O centro) interseca al arco menor AB en el punto C, tal que $m\angle PCT = 145$, entonces la medida del ángulo APB es

- A) 40 B) 70 C) 80
D) 50 E) 60

84. Desde un P, exterior a una circunferencia, se traza la recta tangente $\overline{PT}$ (T punto de tangencia) y la secante PBA, tal que $m\angle OAT = m\angle OAP$ (O centro) y $m\angle APT = 30$. Calcule $m\angle ATO$.

- A) 20 B) 70 C) 80
D) 50 E) 60

85. Desde un P exterior a una circunferencia se traza la recta tangente PT la secante PBC tal que la $m\angle TPB = 90$. Si la relación de PB y BC es de 1 a 3, entonces la relación entre el segmento de recta tangente $\overline{PT}$ y el radio de la circunferencia es



- A) 1:3 B) 2:5 C) 2:3
D) 4:5 E) 1:4

Teoremas de Poncelet, Pitot y Steiner

86. Un trapecio ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ es circunscrito a una circunferencia. Si $BC = 5$ u, $CD = 7$ u y $m\angle BCD = 2m\angle BAD$, entonces el perímetro (en u) del trapecio es

- A) 28 B) 30 C) 32
D) 34 E) 36

87. Dado el rectángulo ABCD, en los lados AB y BC se ubican los puntos P y Q tal que el ángulo PQD es recto. Si las longitudes de los inradios de los triángulos PQD, PBQ, QCD y PAD son r , r_1 , r_2 y r_3 , entonces la longitud de BP es

- A) $r + r_1 + r_2 - r_3$
B) $r + r_3 + r_2 - r_1$
C) $r + r_3 + r_1 - r_2$
D) $2r + r_3 + r_2 - 3r_1$
E) $3r + r_1 + r_2 - 2r_3$

88. El cuadrilátero ABCD, esta circunscrito a una circunferencia. Si $AB - BC = 8$ cm, $m\angle ADC = 90^\circ$ y $2CD = AD$, entonces la longitud (en cm) del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ADC es

- A) 1,25 B) 1,53 C) 2,06
D) 3,06 E) 3,86

89. En el trapecio rectángulo ABCD, circunscrito a una circunferencia ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$) el ángulo ACD es recto. Si la suma de las longitudes de los inradios de los triángulos ABC y ACD es k , entonces la longitud de la base menor BC es

- A) 0,5k B) 0,75k C) k
D) 1,5k E) 1,75k

90. En un paralelogramo ABCD, se trazan la altura $\overline{BH}$ y las circunferencias inscritas en los polígonos AHB y HDCB respectivamente, la circunferencia menor determina el punto de tangencia Q en $\overline{AH}$. Si $HB = 12$ u, entonces la longitud (en u) de QD es

- A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

91. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, en el lado $\overline{AC}$ se ubica el punto D, se traza $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si los inradios de los triángulos AED y CFD miden 2 u y 5 u, entonces la longitud (en u) del inradio del triángulo ABC es

- A) 7 B) 10 C) 12
D) 14 E) 21

92. En un triángulo ABC recto en B, se traza la ceviana $\overline{BD}$ y se inscriben las circunferencias C_1 y C_2 en los triángulos ABD y DBC respectivamente, siendo tangente a $\overline{BD}$ en los puntos E y F ($F \in \overline{ED}$). Si $BE - FD = 4$ u, entonces la longitud (en u) del inradio del triángulo ABC es

- A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

93. En un trapecio isósceles ABCD $AB = CD = a$; la mediana de trapecio mide m . Una recta secante interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en P y Q respectivamente, siendo los cuadriláteros APQD y PBCQ

circunscriptibles a unas circunferencias.
Calcule la longitud de PQ.

- A) $\frac{a-m}{2}$ B) $\sqrt{am}$ C) $a-m$
D) $\frac{a+m}{2}$ E) $\frac{4m}{a+m}$

94. En el paralelogramo ABCD, se traza la altura BH con H en $\overline{AD}$, sabiendo que el inradio del triángulo ABH es r y el radio de la circunferencia inscrita al cuadrilátero BCDH es R. Calcule la longitud de $\overline{HD}$.

- A) $R-r$ B) $2(R-r)$ C) $2R-r$
D) $3R-r$ E) $R-2r$

95. En un cuadrilátero ABCD la circunferencia exinscrita es tangente a las prolongaciones de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ y $\overline{AD}$, $m\angle BCA = 90^\circ$ y $CD + AD = 18u$. Si $AC = 12u$, entonces la longitud (en u) del inradio del triángulo ABC es

- A) 1,0 B) 1,2 C) 1,6
D) 1,8 E) 2,0

Ángulos en la Circunferencia

96. Sea $\overline{AE}$ el diámetro de una semicircunferencia, en la prolongación de $\overline{AE}$, se ubica el punto C, y por este se traza $\overline{CB}$ tangente a la semicircunferencia en el punto N. Si $m\angle ABC = 90^\circ$ y $m\angle BAN = 2m\angle NCA$, entonces la medida del ángulo NCA es

- A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

97. En una circunferencia, las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son secantes y perpendiculares, las rectas tangentes a la circunferencia en B y C se intersectan en el punto F. Si $m\angle BFC = \theta$, entonces la medida del ángulo ABD es

- A) $180 - \theta$ B) $\theta - 90$ C) θ
D) $\frac{\theta}{2}$ E) $\frac{\theta}{3}$

98. Dos circunferencias congruentes de centros A y B son tangentes exteriores. Calcule la medida del ángulo que determinan las rectas tangentes a las circunferencias trazadas de los puntos A y B.

- A) 80 B) 90 C) 120
D) 135 E) 150

99. En una circunferencia, desde un punto P exterior se trazan las rectas tangentes $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$ perpendiculares siendo C y D puntos de tangencia, en el arco menor $\widehat{CD}$ se ubica el punto A tal que la prolongación de $\overline{PA}$ intersecta a la circunferencia en el punto B y $m\widehat{BC} = 2m\widehat{AC}$. ¿Cuánto mide el ángulo BPC?

- A) 15 B) 18 C) 30
D) 45 E) 60

100. En una circunferencia, las cuerdas $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se intersectan en el punto F y las prolongaciones de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ se intersectan en el punto C tal que el ángulo AED mide 15. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos AFD y ACD?

- A) 30 B) 45 C) 53
D) 60 E) 75

101. En una circunferencia está inscrito el pentágono ABCDE, las cuerdas $\overline{EB}$ y $\overline{EC}$ son perpendiculares a las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ respectivamente y el arco $\widehat{ABC}$ mide 160. ¿Cuánto mide el ángulo EBD?

- A) 45 B) 50 C) 55
D) 60 E) 65

102. En un cuadrado ABCD, en el lado $\overline{CD}$ se ubica el punto N tal que $\overline{BN}$ interseca a $\overline{AC}$ en P y el ángulo NAP mide $37/2$, la circunferencia inscrita en el triángulo APB es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BP}$ y $\overline{AP}$ en los puntos L, T y Q respectivamente. ¿Cuál es la medida aproximada del ángulo TLQ?

- A) $\frac{117}{2}$ B) $\frac{217}{4}$ C) $\frac{217}{3}$
D) $\frac{127}{4}$ E) $\frac{117}{4}$

103. En una circunferencia cuyo radio mide R está inscrito el cuadrilátero ABCD, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en un punto P de la circunferencia de diámetro $\overline{BC}$ cuyo radio mide $\frac{R}{2}$. ¿Cuál es la medida del arco menor AD?

- A) 100 B) 105 C) 110
D) 115 E) 120

104. Dos circunferencias C_1 y C_2 son tangentes interiores en el punto Q tal que el diámetro $\overline{AB}$ de C_1 es tangente a C_2 en T y la cuerda $\overline{AN}$ de C_1 contiene al centro

de C_2 . Si $TB = 3(AT)$, entonces la medida aproximada del arco QN es

- A) 61 B) 69 C) 111
D) 119 E) 71

105. En una circunferencia, las rectas tangentes en A y B se intersecan en el punto P y las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ paralelas a $\overline{PB}$ y $\overline{PA}$ son secantes en el punto Q. Si el ángulo APB mide 50, entonces la medida del arco CD es

- A) 28 B) 30 C) 32
D) 34 E) 35

Cuadrilátero Inscriptible a una Circunferencia

106. En un cuadrilátero convexo ABCD, en la diagonal $\overline{BD}$ se ubica el punto M tal que los ángulos BAD y BMC son rectos y $\overline{DB}$ es bisectriz del ángulo ADC. Si el ángulo BCM mide 40, entonces la medida del ángulo MAD es

- A) 40 B) 45 C) 50
D) 60 E) 55

107. En un trapecio ABCD de altura $\overline{BC}$, en las prolongaciones de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos M y H tal que los ángulos AMC y AHC son rectos y el ángulo BMC mide 38. ¿Cuánto mide el ángulo CBH?

- A) 48 B) 50 C) 52
D) 54 E) 46

108. Dos circunferencias C_1 y C_2 son secantes en los puntos M y D, la recta secante que contiene al punto M interseca C_1 y C_2 en los puntos A y C, y las rectas tangentes a

C_1 y C_2 en A y C se intersectan en el punto B tal que $m\angle BCA - m\angle BAC = \phi$. ¿Cuál es la medida del ángulo BDM?

- A) ϕ B) 2ϕ C) $20 - \phi$
D) $90 - 2\phi$ E) $90 - \frac{\phi}{2}$

109. En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita tiene centro en O y tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos R, S y T respectivamente tal que $\overline{TH} \perp \overline{RS}$ ($H \in \overline{RS}$). Si $m\angle A - m\angle C = 28$, entonces la medida del ángulo OTH es

- A) 12 B) 15 C) 14
D) 16 E) 21

110. En el cuadrado ABCD, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ en P y Q. En el arco menor PQ se ubica el punto S tal que $m\angle ABS = m\angle SAQ$. Calcule la medida del ángulo CBS.

- A) 53 B) 60 C) 70
D) 75 E) 80

Proporcionalidad de Segmentos Teorema de Thales

111. En un rectángulo ABCD, en el interior y exterior se ubican los puntos P y Q tal que $\overline{PQ}$ y $\overline{CD}$ se intersectan en el punto M y los triángulos BCP y CDQ son equiláteros. Si $AB = k(BC)$, entonces la razón entre $\overline{MQ}$ y $\overline{PM}$ es

- A) $\sqrt{3}k$ B) $\sqrt{2}k$ C) k
D) $2\sqrt{3}k$ E) $2\sqrt{2}k$

112. En el interior de un triángulo ABC se ubica el punto P, en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos Q, T y S tal que

$\overline{QP} \parallel \overline{AC}$, $\overline{PT} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{PS} \parallel \overline{BC}$. Si $PQ = PT = PS$ y $(AQ)(BT)(SC) = 27 \text{ u}^3$, entonces la longitud (en u) de PQ es

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 5 E) 3

113. En un paralelogramo ABCD, en la prolongación de $\overline{DC}$ se ubica el punto F tal que $\overline{AF}$ intersecta a $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ en los puntos P y E. Si $AE = a$ y $EP = b$, entonces la longitud de $\overline{PF}$ es

- A) $\frac{b^2}{a}$ B) $\frac{a^2}{b}$ C) $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$
D) $\frac{a^2 - b^2}{b}$ E) $\frac{a^2 - b^2}{a}$

114. El ángulo ABC y el ángulo recto DEF tienen los vértices cada uno en el interior del otro y las rectas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son paralelos entre si, tal que $\overline{BE}$ es bisectriz del ángulo ABC. Si $m\angle BED = 30$ y $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, entonces la razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es

- A) $1/3$ B) $\sqrt{3}/3$ C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) $2\sqrt{3}$

115. Tres circunferencias C_1 , C_2 y C_3 son tangentes interiores dos a dos en el punto T, en C_1 , C_2 y C_3 se trazan las cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ tal que $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = m\widehat{EF}$, $AB < CD < EF$ y el radio de C_2 es media proporcional entre los radios de C_1 y C_3 . Si $AB = 4 \text{ u}$ y $EF = 9 \text{ u}$, entonces la longitud (en u) de $\overline{CD}$ es

- A) 3 B) 5 C) 6
D) 12 E) 13

**Teoremas de la Bisectriz Interior,
Bisectriz Exterior e Incentro**

116. En un triángulo ABC, $7(AB) = 4(BC)$. Se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la ceviana $\overline{AN}$ (N en $\overline{BC}$). En $\overline{AN}$ y en su prolongación se ubican los puntos E y F tal que $m\angle ADE = m\angle ACF = 90^\circ$. Si $AE = 8$ u, entonces la longitud (en u) de EF es

- A) 8 B) 21 C) 12
D) 16 E) 14

117. En un triángulo ABC, $AB > BC$, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto E, luego se traza $\overline{EF} \perp \overline{AC}$ tal que A - C - F y $m\angle ACB = 2(m\angle CEF)$. Si $AC = b$ y $BC = a$, entonces la razón entre AB y BE es

- A) $\frac{b-a}{a}$ B) $\frac{a}{a+b}$ C) $\frac{b-a}{b}$
D) $\frac{a+b}{b}$ E) $\frac{a+b}{a}$

118. En un triángulo ABC, $AB < BC$, se traza la bisectriz exterior $\overline{BP}$. En el triángulo PAB, $\overline{PL}$ es la bisectriz interior (L en $\overline{AB}$) y la prolongación de $\overline{CL}$ interseca a $\overline{BP}$ en el punto E. Si $BL = 3$ u, $PC = 8$ u y $BC = 7$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{PE}$ es

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

119. En un triángulo ABC, E es un punto de $\overline{BC}$, tal que el triángulo CAE es isósceles de base $\overline{EC}$ y $m\angle ABC = m\angle EAC$. Se traza $\overline{BT}$, perpendicular a la prolongación de $\overline{AE}$ (A - E - T). Si $BE = a$; $EC = b$, entonces la razón entre AE y ET es

- A) $\frac{2a}{a+2b}$ B) $\frac{2a}{a+b}$ C) $\frac{2a}{b}$
D) $\frac{2(a+b)}{b}$ E) $\frac{2(a+b)}{a}$

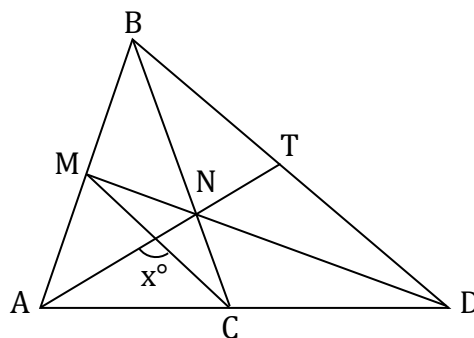
120. En un triángulo ABC, I es incentro y $\overline{BF}$ es bisectriz interior. En $\overline{BC}$ se ubica R y en $\overline{BF}$ los puntos medios M y N de los segmentos $\overline{BI}$ y $\overline{IF}$ respectivamente, tal que $m\angle MRI = m\angle NRI$. Si $MR = a$, $NR = b$ y $AC = c$, entonces $AB + BC$ es

- A) $\frac{bc}{a}$ B) $\frac{ab}{c}$ C) $\frac{ac}{b}$
D) $\frac{a+b}{bc}$ E) $\frac{a+b}{ac}$

121. En un triángulo ABC recto en B se traza la altura $\overline{BH}$. Las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ intersecan a la altura $\overline{BH}$ en los puntos M y N. Si $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm y $AC = 10$ cm, entonces la longitud (en cm) de $\overline{MN}$ es

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{7}$

122. En la figura, $m\angle ABC = 40^\circ$, $m\angle CBD = 70^\circ$ y $m\angle BAN = m\angle NAC$, calcule el valor de x.



- A) 100 B) 106 C) 108
D) 110 E) 112

123. En un rombo ABCD, en los lados CD y AD se ubican los puntos F y E tal que $\overline{BF}$ es perpendicular a $\overline{CE}$ y $m\angle BCE = 3 m\angle ECD$. Si $CF = 7$ u y $FD = 2$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{ED}$ es

- A) 2,62 B) 2,82 C) 3,24
D) 3,42 E) 4,50

124. En un triángulo ABC de incentro I y baricentro G cuyas longitudes de sus lados están en progresión aritmética de razón r. Calcule la longitud de $\overline{IG}$.

- A) r B) $\frac{r}{3}$ C) $\frac{r}{2}$
D) $\frac{2r}{3}$ E) 2r

125. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz exterior $\overline{CE}$, la prolongación de $\overline{EC}$ interseca a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en el punto P y en $\overline{CE}$ se ubica el punto H tal que $\overline{BH} \perp \overline{CE}$. Si $CP = a$ y $CE = b$, entonces la longitud de $\overline{CH}$ es

- A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{ab}{2a+b}$ C) $\frac{ab}{a+2b}$
D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

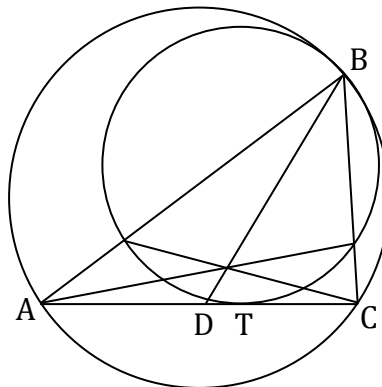
Teoremas de Menelao y Ceva

126. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas AD, $\overline{BF}$ y CE concurrentes en el punto M. Si $EB = 2$ cm, $AE = 5$ cm, $BD = 3$ cm y $DC = 7$ cm, entonces $\frac{BM}{MF}$ es

- A) $\frac{19}{27}$ B) $\frac{29}{35}$ C) $\frac{26}{29}$

- D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

127. En la figura, B y T son puntos de tangencia; $AB = 12$ u, $BC = 6$ u y $AC = 9$ u. Calcule la longitud (en u) de $\overline{DT}$.



- A) 0,375 B) 0,5 C) 1,0
D) 1,5 E) 0,8

128. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas concurrentes $\overline{AG}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CF}$. Las prolongaciones de $\overline{FG}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en el punto E; además $\overline{BD}$ interseca a $\overline{FG}$ en el punto H. Si $FH = 7$ cm y $HG = 2$ cm, entonces la longitud (en cm) de $\overline{GE}$ es

- A) $\frac{11}{3}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{13}{3}$
D) $\frac{18}{5}$ E) $\frac{21}{5}$

129. En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos D, E y F respectivamente; además las prolongaciones de $\overline{DE}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en el punto R. Si $AF = 5$ cm y $FC = 4$ cm, entonces la longitud (en cm) de $\overline{CR}$ es

- A) 30 B) 32 C) 36
D) 38 E) 40

130. En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ tal que A-D-C y la mediana $\overline{CR}$ la cual interseca a las cevianas en los puntos M y N. Si $\frac{DE}{2} = \frac{EC}{3} = AD$, entonces $\frac{BM}{MD} + \frac{BN}{NE}$ es

- A) $\frac{16}{5}$ B) $\frac{17}{5}$ C) $\frac{18}{7}$
D) $\frac{21}{5}$ E) $\frac{23}{5}$

Semejanza de Triángulos

131. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, una recta secante interseca al arco $\widehat{AB}$ en los puntos E y D. Luego, se trazan $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DG} \perp \overline{AB}$. Si $BG = 2$ u y $FG = 6$ u, entonces la longitud (en u) de la perpendicular trazada desde el punto B a la recta ED es

- A) 1,5 B) 2,0 C) 3,5
D) 4,0 E) 4,5

132. Un trapecio isósceles, de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, es circunscrito a una circunferencia tangente a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ en los puntos M y N. Si $AB = a$ y $CD = b$, entonces la longitud de $\overline{MN}$ es

- A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $2\sqrt{ab}$ E) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$

133. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Dos triángulos equiláteros, son semejantes.
II. Dos triángulos rectángulos isósceles, son semejantes.

III. Dos polígonos regulares, son semejantes.

- A) VVV B) VVF C) FFV
D) FFF E) VFF

134. En un triángulo ABC recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Demuestre la siguiente relación:

$$BD = \frac{(AB)(BC)\sqrt{2}}{AB + BC}$$

135. En un triángulo ABC, $m\angle ABC = 90^\circ + m\angle BAC$. Se traza la altura $\overline{CH}$. Si $AB = 5$ u y $BH = 4$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{CH}$ es

- A) 5 B) 6 C) 6,5
D) 8 E) $2\sqrt{5}$

136. Dado el paralelogramo ABCD ($AB < BC$), se traza $\overline{PA}$ (P en $\overline{CD}$) que interseca a $\overline{BD}$ en Q. Si $CD = 18$ u y $BQ = 6(DQ)$, entonces la longitud (en u) de $\overline{DP}$ es

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

137. En el interior del triángulo ABC, se ubica el punto P, se trazan $\overline{PM}$ y $\overline{PQ}$ perpendiculares a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ (M en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$). Si $AC = 3MQ$ y $BP = 8$ u, entonces la longitud (en u) del circunradio del triángulo ABC es

- A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

138. En un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$), se ubica el punto O en la base y con centro en O se traza una circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. La recta tangente a la

circunferencia interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos M y N. Si $AM = a$ y $CN = b$, entonces la longitud de $\overline{AC}$ es

- A) $2\sqrt{ab}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $4\sqrt{ab}$ E) $\frac{ab}{a+b}$

139. Por el circuncentro O de un triángulo ABC se traza una recta perpendicular a $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{BC}$ en Q y a la prolongación de $\overline{AB}$ en P. Si $(OP)(OQ) = 121 \text{ u}^2$, entonces la longitud (en u) del circunradio del triángulo ABC es

- A) 5,5 B) 4,5 C) 11
D) 13 E) 12

140. En un triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) están inscritas dos circunferencias tangentes exteriores y tangentes a los lados congruentes. Si los radios miden R y r ($R > r$), entonces la longitud de la altura relativa al lado desigual es

- A) $\frac{2R^2}{R-r}$ B) $\frac{2R^2}{R+r}$ C) $\frac{2r^2}{R-r}$
D) $\frac{2R^2}{R-2r}$ E) $\frac{2r^2}{R-2r}$

Puntos Notables en el Triángulo

141. En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, se ubica T punto medio del arco AB; en $\overline{OT}$ y $\overline{OB}$ se ubican los puntos M y S tal que OMPS es un rectángulo, $P \in \widehat{TB}$, $\overline{PQ} \perp \overline{TB}$ y T-Q-B. ¿Qué punto notable es Q del triángulo MPS?

- A) Baricentro B) Circuncentro
C) Incentro D) Ortocentro
E) Excentro

142. Dado un rombo ABCD, se traza exteriormente el cuadrado BFGC de centro O, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{GD}$ respectivamente. ¿Qué punto notable es C del triángulo MON?

- A) Baricentro B) Circuncentro
C) Incentro D) Ortocentro
E) Excentro

143. En un triángulo ABC, con diámetro $\overline{AC}$ se traza una semicircunferencia que contiene al baricentro G del triángulo ABC. Si $AG = 2 \text{ u}$ y $m\widehat{AG} = 53$, entonces la longitud (en u) del lado $\overline{BC}$ es

- A) $\sqrt{19}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{13}$
D) $2\sqrt{17}$ E) $\sqrt{11}$

144. Dado el rectángulo ABCD, se traza una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ y tangente al lado $\overline{BC}$ en el punto T. Si $\overline{TD}$ interseca a $\overline{AC}$ en P y $BP = 2\sqrt{17} \text{ u}$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AD}$ es

- A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

145. En un triángulo ABC de ortocentro H, $m\angle ABC = 65^\circ$. En el exterior respecto a $\overline{BC}$ se ubica el punto P tal que $m\angle HAC = m\angle HPC$. Calcule la medida del ángulo BPH.

- A) 15 B) 35 C) 25
D) 65 E) 50

146. En un triángulo ABC, la recta que contiene al baricentro G es perpendicular

a $\overline{AC}$ en M. La altura BH interseca a $\overline{AG}$ en T. Si $AH = HM$, entonces la razón entre BT y TH es

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

147. En un triángulo acutángulo ABC, el incentro es el punto I, en $\overline{AC}$ se ubican los puntos M y N tal que $A - M - N$, $m\angle ABC = m\angle MIN$ y $MI = IN$. Si $AM = a$, $NC = b$, entonces la longitud de $\overline{IM}$ es

- A) $a + b$ B) $\sqrt{ab}$
C) $\sqrt{a^2 + b^2}$ D) $\frac{a+b}{2}$
E) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1}$

148. En un triángulo ABC, recto en A, E es el excentro relativo a $\overline{BC}$. Si O es el circuncentro del triángulo BEC, entonces la $m\angle OAC$ es

- A) 60 B) 45 C) 37
D) 53 E) 75

149. En un triángulo ABC, I es el incentro y G es el baricentro. Si $\overline{IG}$ es paralelo a $\overline{AC}$ y el perímetro del triángulo es $2p$, entonces la longitud de $\overline{AC}$ es

- A) $\frac{p}{2}$ B) $\frac{p}{3}$ C) $\frac{p}{4}$
D) $\frac{2p}{3}$ E) $\frac{3p}{4}$

150. En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, se ubica el punto C, siendo $\overline{CH}$ perpendicular a AB en H. En $\overline{CH}$ y en $\overline{HB}$ se ubican los puntos M y N respectivamente y en $\overline{BC}$ se ubica el

punto medio D. Si $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ y $\overline{DH}$ son concurrentes, entonces la medida del ángulo determinado por $\overline{CN}$ y $\overline{AM}$ es

- A) 60 B) 75 C) 76
D) 90 E) 120

Recta y Circunferencia de Euler

151. En el triángulo acutángulo ABC la recta de Euler es paralela al lado $\overline{AC}$, la altura $\overline{BH}$ mide 12 m y el circunradio mide 10 m. Calcule la longitud (en m) de $\overline{AC}$.

- A) $12\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{19}$ C) $8\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{21}$ E) $4\sqrt{22}$

152. En un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura $\overline{CH}$ y se ubican los puntos medios M y N de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $m\angle MHN = 26,5^\circ$ y $AB = 12$ u, entonces la longitud (en u) aproximada del radio de la circunferencia de Euler del triángulo ABC es

- A) $2\sqrt{5}$ B) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $\frac{7\sqrt{5}}{2}$ E) $4\sqrt{5}$

153. En un triángulo ABC, la recta de Euler interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos P y Q tal que el ángulo PBQ mide 60° y $BQ = 5$ u. ¿Cuál es longitud (en u) de $\overline{PQ}$?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

154. En un triángulo acutángulo ABC, el ángulo ABC mide 60° y la distancia del ortocentro al vértice B es 8 u. Calcule la longitud (en u) del radio de la circunferencia de Euler del triángulo.

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 9

155. En un triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia, la recta de Euler interseca a los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ en los puntos P y Q. Si $m\angle ABC = 50^\circ$, entonces la medida del ángulo determinado por las cuerdas $\overline{AQ}$ y $\overline{PC}$ es

- A) 20° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 60°

Relaciones Métricas en el Triángulo Rectángulo

156. En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ y en el cateto $\overline{BC}$ se ubica el punto F tal que $AF = FC = HC = 2$ u. ¿Cual es la longitud (en u) de $\overline{BC}$?

- A) $2\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{4}$ C) $4\sqrt[3]{2}$
D) $3\sqrt[3]{2}$ E) $2\sqrt[3]{4}$

157. En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ que interseca a las bisectrices interiores $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ en P y Q respectivamente. Si $(AE)(PE) + (CF)(QF) = 64 \text{ m}^2$, entonces la longitud (en m) de $\overline{EF}$ es

- A) $4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{2}$
D) 8 E) 16

158. Sean los cuadrados ABCD y DEFG, tal que $C - E - D$ y $A - D - G$. Si $AB = a$ y $DE = b$,

entonces la distancia de F a la recta que contiene a los centros de los cuadrados es

- A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
C) $\frac{ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$
D) $\frac{2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$ E) $\frac{2ab}{a+b}$

159. En una circunferencia de diámetro $\overline{AC}$, en el arco $\widehat{AC}$ se ubica el punto P y en $\overline{AC}$ se ubican los puntos H y B, tal que $A - H - B$, $\overline{PH} \perp \overline{AB}$ y la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ interseca a $\overline{PH}$ en el punto M, luego en $\overline{PC}$ se ubica el punto Q de modo que $\overline{HQ}$, $\overline{PB}$ y $\overline{CM}$ se intersecan en el punto R y los ángulos HQC y QBC son rectos. ¿Cuanto mide el ángulo HQB?

- A) 15° B) 18° C) 20°
D) 30° E) 45°

160. En un rectángulo ABCD, en la prolongación del lado $\overline{AD}$ se ubica el punto P tal que la circunferencia de diámetro $\overline{AP}$ interseca al lado $\overline{CD}$ en el punto Q. Si $4(AP) = 5(AB)$, $AQ = a$ y la distancia de B a $\overline{AC}$ es b, entonces la longitud de $\overline{AC}$ es

- A) $\frac{0,2 a^2}{b}$ B) $\frac{0,4 a^2}{b}$ C) $\frac{0,8 a^2}{b}$
D) $\frac{a^2}{b}$ E) $\frac{1,25 a^2}{b}$

161. Un cuadrilátero ABCD está inscrito en una circunferencia de diámetro $\overline{AD}$, el punto H es la proyección ortogonal de vértice B sobre $\overline{AD}$ y $\overline{AC} \cap \overline{BH} = \{P\}$. Si $AP = 3 \text{ cm}$ y $PC = 5 \text{ cm}$, entonces la longitud (en cm) de $\overline{AB}$ es

- A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{2}$

162. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ tal que las proyecciones ortogonales del punto H sobre los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son los puntos M y N. Si $AM = 1$ cm y $CN = 8$ cm, entonces la longitud (en cm) de $\overline{AC}$ es

- A) $4\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{6}$ C) $6\sqrt{5}$
D) $6\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{5}$

163. En un triángulo acutángulo ABC, H es el ortocentro, se traza la altura $\overline{BM}$ y en $\overline{BH}$ se ubica el punto F, tal que $m\angle AFC = 90^\circ$. Si $BF = 5$ cm y $FH = 3$ cm, entonces la longitud (en cm) de $\overline{HM}$ es

- A) 3,6 B) 4,2 C) 4,5
D) 4,8 E) 5,2

164. Dos circunferencias congruentes C_1 y C_2 de centros P y Q, son secantes en los puntos F y G, tal que P y Q pertenecen a C_2 y C_1 respectivamente, en los arcos $\widehat{FP}$ y $\widehat{FQ}$ se ubican los puntos A y B, y en $\widehat{PQ}$ se ubican los puntos C y D tal que ABCD es un cuadrado. Si $PQ = 8$ cm, entonces el perímetro (en cm) de ABCD es

- A) 18,4 B) 18,6 C) 19,2
D) 19,6 E) 20,6

165. En un rectángulo ABCD, $AB = 3$ cm y $BC = 5$ cm, los puntos P y Q son las proyecciones ortogonales de los vértices B y D sobre $\overline{AC}$. Calcule la longitud (en cm) de la proyección ortogonal de $\overline{PQ}$ sobre $\overline{AD}$.

- A) $\frac{40}{17}$ B) $\frac{41}{17}$ C) $\frac{42}{17}$
D) $\frac{43}{17}$ E) $\frac{44}{17}$

166. En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{HC}$. Si $AB = 22$ u y $HC = 120$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{MN}$ es

- A) 51 B) 60 C) 61
D) 65 E) 71

167. En un trapecio isósceles ABCD, en la base $\overline{AD}$ se ubica el punto H tal que $\overline{CH} \perp \overline{AD}$, $BC = 2(HD)$ y los ángulos CAD y HCD son congruentes. Si $AB = 8$ u, entonces la longitud (en u) de la altura del trapecio es

- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

168. En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. Si los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos AHB y HBC miden 1,2 u y 1,6 u, entonces la longitud (en u) de la hipotenusa $\overline{AC}$ es

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

169. En un cuadrado ABCD, con centros en los vértices A y D se trazan los arcos $\widehat{BD}$ y $\widehat{AC}$ que se intersectan en el punto M. Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes exteriores y tangentes a los arcos $\widehat{AM}$ y $\widehat{MD}$ tal que C_1 es tangente al lado $\overline{AD}$. ¿Cuál es la razón de los radios de las circunferencias C_1 y C_2 ?

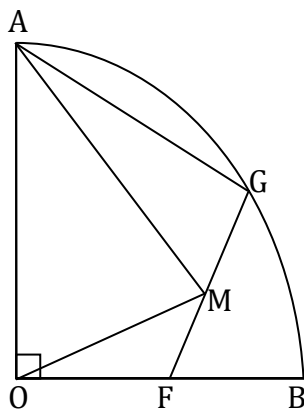
- A) 7 B) 8 C) 9
D) 11 E) 12

170. En un cuadrilátero convexo ABCD, los ángulos ABC y ACD son rectos y $AB = BC = CD = 1$ u. ¿Cuál es la distancia (en u) del vértice B al lado $\overline{AD}$?

- A) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{4}$
C) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{7}$ D) $\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{2})}{6}$
E) $\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{6}$

Relaciones Métricas en el Triángulo Oblicuángulo

171. En la figura, O es centro del arco $\widehat{AB}$, $OF = FB$, $FM = MG$. Si $AG = 6$ u, entonces el valor (en u^2) de $(AM)^2 - (OM)^2$ es



- A) 12 B) 15 C) 18
D) 24 E) 32

172. En una circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$ se ubican los puntos C y D tal que $m\widehat{CD} = 2m\widehat{AC}$, en $\overline{AO}$ se ubica el punto E tal que $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, $CE = 2$ m y $AB = 10$ m. ¿Cuál es la distancia (en m) de C a $\overline{OD}$?

- A) $2\sqrt{21}$ B) $\sqrt{21}$ C) $0,8\sqrt{21}$
D) $2\sqrt{19}$ E) $2\sqrt{15}$

173. En un triángulo ABC, $AB = 13$ m, $BC = 14$ m y $AC = 15$ m, la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en E. Calcule la longitud (en m) de la flecha correspondiente a la cuerda $\overline{EC}$.

- A) 1,5 B) 1,6 C) 1,8
D) 1,9 E) 2,1

174. En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, en el arco $\widehat{AB}$ se ubican los puntos C y D tal que $m\widehat{AC} = m\widehat{CD}$. Si $AB = 8$ m y $BC = 6$ m, entonces la longitud (en m) de $\overline{BD}$ es

- A) 0,5 B) 0,6 C) 0,8
D) 1,0 E) 1,1

175. En un cuadrilátero convexo ABCD, en la diagonal $\overline{AC}$ se ubican los puntos H y Q tal que los ángulos ABC, AHB y CQD son rectos y $HQ = QC$. Si $AD = 13$ m y $CD = 12$ m, entonces la longitud (en m) de $\overline{AB}$ es

- A) 4 B) 5 C) 6
D) $2\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{13}$

176. La suma de cuadrados de las longitudes de los lados de un triángulo es S. Calcule la suma de cuadrados de las longitudes de las medianas del triángulo.

- A) S B) $2S/3$ C) $3S/2$
D) $3S/4$ E) $4S/3$

177. Las longitudes de los lados de un triángulo miden $\sqrt{18}$ u, $\sqrt{20}$ u y $\sqrt{26}$ u.

Calcule la longitud (en u) de la mayor altura del triángulo.

- A) $\sqrt{18}$ B) 6 C) $\sqrt{20}$
D) $\sqrt{26}$ E) 4

178. Las longitudes de los radios de tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos, son 6 u, 7 u y 14 u. Calcule la distancia (en u), del centro de la menor circunferencia a la recta que contiene a los centros de las otras dos.

- A) 10 B) 12 C) 13
D) 11 E) 9

179. Las longitudes de los lados de un triángulo ABC, son $AB = 13$ u, $AC = 14$ u y $BC = 15$ u. ¿En qué razón divide el ortocentro a la altura $\overline{BH}$?

- A) $9/4$ B) $12/7$ C) $11/5$
D) $13/6$ E) 2

180. En un cuadrilátero convexo ABCD, $AC = 24$ u, $m\angle BCD = 90^\circ = m\angle CAD$, $AB = BC$ y $m\angle ACD = 53^\circ$. Calcule aproximadamente, la longitud (en u) del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

- A) 11 B) 10 C) 13
D) 14 E) 12

181. En una circunferencia, desde un punto exterior B se trazan las rectas tangentes $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ tal que A y C son puntos de tangencia y en el arco mayor $\widehat{AC}$ se ubica el punto P. Si $(PB)^2 = (AP)^2 + (AP)(PC) + (PC)^2$, entonces la medida del ángulo ABC es

- A) 30 B) 45 C) 60
D) 90 E) 120

182. En un triángulo ABC, los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ miden c, a y b, las circunferencias inscrita y exinscrita correspondiente al lado $\overline{BC}$ son tangentes a $\overline{BC}$ en los puntos P y Q tal que B - P - Q. Calcule el valor de $(AQ)^2 - (AP)^2$.

- A) $(b-c)^2 \frac{(b+c)}{a}$
B) $(a-c)^2 \frac{(a+c)}{b}$
C) $(b+c)^2 \frac{(b-c)}{a}$
D) $(a+b)^2 \frac{(a-b)}{c}$
E) $(b-c)^2 \frac{(b+c)}{2a}$

183. En un triángulo ABC, recto en B, las circunferencias congruentes C_1 y C_2 son tangentes a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos A y C tal que $\overline{AC}$ interseca a C_1 y C_2 , y $\overline{PQ}$ es la recta tangente común interior siendo P y Q puntos de tangencia. Si $BP = a$ y $BQ = b$, entonces la longitud de $\overline{AC}$ es

- A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $2\sqrt{ab}$
D) $\sqrt{a^2 + b^2}$ E) $\frac{2ab}{a+b}$

184. En un triángulo ABC, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden c y a, y el ángulo BAC mide tres veces lo que mide el ángulo ACB. ¿Cuál es la longitud de $\overline{AC}$?

- A) $(a-c)\sqrt{\frac{a+c}{a}}$ B) $(a+c)\sqrt{\frac{a-c}{c}}$

- C) $(a-c)\sqrt{\frac{a+c}{c}}$ D) $(a+c)\sqrt{\frac{a-c}{a}}$
E) $\sqrt{a^2 - c^2}$

185. Dos circunferencias C_1 y C_2 son tangentes interiores en el punto T, la cuerda $\overline{AB}$ de C_1 es tangente a C_2 en el punto P tal que el arco $\widehat{ATB}$ mide 120. Si $AP = a$ y $PB = b$, entonces la longitud de $\overline{PT}$ es

- A) $\frac{ab}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}}$ B) $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}$
C) $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}$ D) $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}}$
E) $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}$

Relaciones Métricas en la circunferencia

186. En una circunferencia de diámetro $\overline{AC}$, se ubica el punto B y en las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos medios M y N tal que la recta $\overline{MN}$ interseca a los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ en los puntos P y Q. Si $PM = 1$ u y $NQ = 2$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{MN}$ es

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) $4\sqrt{2}$

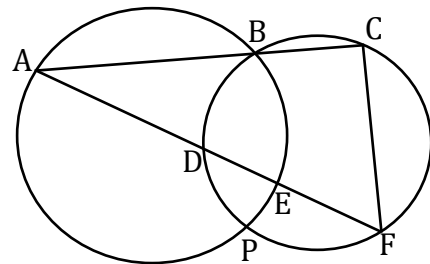
187. En una circunferencia cuyo radio mide 3 u, está inscrito el triángulo ABC, en el lado $\overline{AC}$ se ubica el punto D y en $\overline{BD}$ se ubica el punto E tal que $\overline{ED}$ es congruente con la cuerda $\overline{CF}$ y los ángulos DAE y DBC son congruentes. Si $(AE)(DC) = 9$ u², entonces la distancia de C a la cuerda $\overline{BF}$ es

- A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3,0

188. En una circunferencia, se trazan las cuerdas paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, en $\overline{CD}$ se ubica el punto T tal que las prolongaciones de $\overline{BT}$ y $\overline{AT}$ intersecan a la circunferencia en los puntos E y F, y las prolongaciones de las cuerdas $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ se intersecan en G. Si $CT = 6$ u y $TD = 4$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{GD}$ es

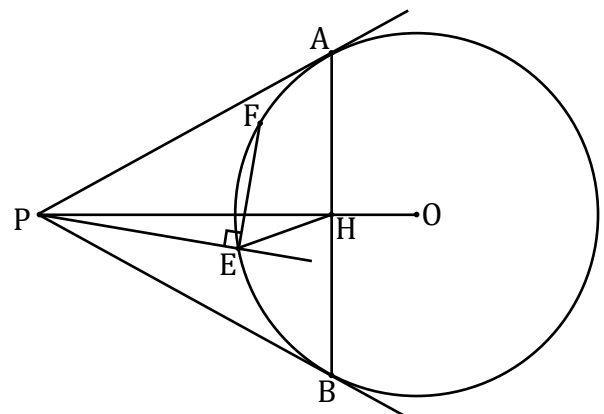
- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

189. En la figura, los arcos $\widehat{BC}$ y $\widehat{PF}$ son congruentes, $AD = 7$ u, $DE = 3$ u y $EF = 5$ u. Calcule la longitud (en u) de $\overline{AC}$.



- A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{3}$
D) $8\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{5}$

190. En la figura, O es centro de la circunferencia, A y B son puntos de tangencia y $m\angle PHE = 20$. Calcule la medida del arco $\widehat{EF}$.



- A) 20 B) 25 C) 30
D) 40 E) 70

191. En una circunferencia cuyo radio mide R , se trazan los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ perpendiculares a las cuerdas $\overline{EC}$ y $\overline{AC}$ tal que $\overline{AC}$ y $\overline{ED}$ se intersecan en el punto y la prolongación de $\overline{BM}$ interseca al arco $\widehat{AD}$ en el punto Q . Si $m\widehat{AE} = 120$, entonces la longitud de $\overline{MQ}$ es

- A) $\frac{3R\sqrt{7}}{14}$ B) $\frac{R\sqrt{7}}{14}$ C) $\frac{3R\sqrt{7}}{16}$
D) $\frac{3R\sqrt{7}}{10}$ E) $\frac{R\sqrt{7}}{14}$

192. En un triángulo rectángulo isósceles ABC , con centro en la hipotenusa $\overline{AC}$ se traza una circunferencia tangente a $\overline{BC}$ en el punto E y que interseca a $\overline{AB}$ en el punto F . Si $AF = 23$ u y $FB = 2$ u, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia es

- A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

193. Dos circunferencias C_1 y C_2 de centro O y Q son tangentes interiores, en C_1 se trazan el diámetro $\overline{MN}$ que es tangente a C_2 en el punto T y la cuerda $\overline{AB}$ que contiene a Q tal que $MN = 4(TN) = 16$ u. Calcule el producto de las longitudes (en u^2) de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{QB}$.

- A) 35 B) 36 C) 37
D) 38 E) 39

194. En un rectángulo $ABCD$, en la prolongación de la diagonal $\overline{AC}$ se ubica el

punto P tal que $\overline{PB}$ interseca a la circunferencia que sólo contiene al vértice B en el punto L y $m\angle PLC = 2(m\angle BAC)$, luego por P se traza una recta tangente a la circunferencia en el punto T . Si $PT = 6$ u, $PC = 4$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AC}$ es

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

195. En una circunferencia cuya radio mide $5\sqrt{2}$ u, en la cuerda $\overline{AB}$ y en el arco mayor $\widehat{AB}$ se ubican los puntos medios M y D tal que las prolongaciones de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se intersecan en el punto P y el arco $\widehat{BC}$ mide 90 . Si $DM = 9\sqrt{2}$ u, entonces la longitud (en u) del segmento determinado al traza por P una recta tangente a la circunferencia es

- A) $3\sqrt{70}$ B) $4\sqrt{70}$ C) $5\sqrt{70}$
D) $6\sqrt{70}$ E) $7\sqrt{70}$

Teorema de Ptolomeo y Viette

196. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- I. Si en un rectángulo, se aplica el teorema de Ptolomeo, entonces se obtiene una relación el teorema de Pitagórica entre una diagonal y dos lados consecutivos.
- II. El teorema de Ptolomeo se aplica sólo en los cuadriláteros exinscritos a una circunferencia.
- III. El teorema de Ptolomeo se aplica en los cuadriláteros inscritos e inscriptibles a una circunferencia.

- A) VVF B) FVF C) VFV
D) FFV E) VVV

197. En un triángulo acutángulo ABC , se trazan la altura $\overline{BH}$ y las alturas $\overline{HM}$ y $\overline{HN}$ en los triángulos AHB y BHC . Si $(AM)(CN) + (AC)(MN) = a$, entonces $(AN)(CM)$ es

- A) a B) $2a$ C) $3a$
D) $4a$ E) $5a$

198. En un cuadrado $ABCD$, en la diagonal $\overline{AC}$ se ubica el punto P y en el lado $\overline{AD}$ se ubica el punto M tal que el ángulo BPM es recto. Si $AB + AM = 2\sqrt{2}u$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AP}$ es

- A) $1,0$ B) $2,0$ C) $3,0$
D) $3,5$ E) $4,0$

199. Dos circunferencias C_1 y C_2 son tangentes exteriores en B , la recta L exterior a C_2 es tangente a C_1 en el punto A , la prolongación de $\overline{AB}$ interseca a C_2 en F y la prolongación de la cuerda $\overline{FC}$ de C_2 interseca a L en D . Si $AB = BC = a$, $AD = b$ y $CD = c$, entonces $(BD)^2$ es

- A) $a^2 + bc$ B) $a^2 + 2bc$
C) $a^2 - bc$ D) $a^2 + 3bc$
E) $2a^2 + bc$

200. En un triángulo ABC de incentro I , la prolongación de $\overline{BI}$ interseca a la circunferencia circunscrita al triángulo en el punto D . Si $AB = c$, $BC = a$ e $ID = b$, entonces la longitud de $\overline{BI}$ es

- A) $\sqrt{ca + b^2} + b$ B) $\sqrt{ca + b^2} + 2b$
C) $\sqrt{ca + b^2} - b$ D) $\sqrt{ca + 2b^2} - b$

E) $\sqrt{ca + b^2} + 3b$

Polígonos Regulares

201. En una circunferencia están inscritos los polígonos regulares de n , $2n$ y 6 lados, tal que ℓ_n , ℓ_{2n} y ℓ_6 son las longitudes de los lados respectivamente. Si $(\ell_n)^2 = (\ell_{2n})^2 + (\ell_6\sqrt{2})^2$, entonces el valor de n es

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 3

202. Tres polígonos regulares de n , $3n$ y 6 lados, cuyos lados miden ℓ_n , ℓ_{3n} y ℓ_6 están inscritos en una circunferencia. Si $\ell_n^2 = \ell_{2n}^2 + \ell_n^2$, entonces el valor de n es

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

203. Un cuadrilátero $ABCD$, está inscrito en una circunferencia, tal que las longitudes de $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ corresponde a las longitudes de lados de los polígonos regulares de m , n , mn y m lados respectivamente. Calcule $m + n$.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

204. En un polígono regular de n lados, la apotema y el circunradio miden a y R . Calcule la longitud del diámetro de la circunferencia circunscrita al polígono regular de $2n$ lados que sea isoperimétrico con el polígono regular de n lados.

- A) $\sqrt{R(R+a)}$ B) $\sqrt{2R(R+a)}$
 C) $\sqrt{R(R+2a)}$ D) $\sqrt{R(2R+a)}$
 E) $\sqrt{2R(R-a)}$

205. En un polígono regular de n lados, el lado y el circunradio miden L_n y R . Calcule la longitud del lado del polígono regular de n lados circunscrito a la misma circunferencia.

- A) $\frac{RL_n}{\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$ B) $\frac{2RL_n}{\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$
 C) $\frac{2RL_n}{\sqrt{4R^2 + L_n^2}}$ D) $\frac{4RL_n}{\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$
 E) $\frac{RL_n}{\sqrt{4R^2 + L_n^2}}$

Polígonos Regulares de 3, 6 y 12 Lados

206. En un triángulo ABC, recto en B, el ángulo BCA mide $7,5$ y la hipotenusa mide 12 u. ¿Cuál es la longitud (en u) de la altura correspondiente a la hipotenusa?

- A) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ B) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
 C) $2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ D) $3\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
 E) $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

207. En un triángulo acutángulo ABC, el ángulo ABC mide 75 y el lado $\overline{AC}$ mide 10 u. Calcule la distancia (en u) entre los pies de las alturas $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$.

- A) $2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ B) $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
 C) $5\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ D) $5\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
 E) $10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

208. En un hexágono regular ABCDEF, el circunradio mide R y en el lado $\overline{DE}$ se ubica el punto medio M , tal que $\overline{BM}$ interseca a la diagonal $\overline{CF}$ en el punto T . ¿Cuál es la longitud de $\overline{BT}$?

- A) $\frac{R}{4}\sqrt{7}$ B) $\frac{R}{4}\sqrt{10}$ C) $\frac{R}{4}\sqrt{13}$
 D) $\frac{R}{4}\sqrt{15}$ E) $\frac{R}{4}\sqrt{17}$

209. En un triángulo equilátero ABC, de circuncentro O , la circunferencia que contiene a los puntos O y C interseca a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P y Q . Si $PC = 6$ u y $QC = 4$ u, entonces la longitud (en u) del lado del triángulo equilátero es

- A) 5 B) 8 C) 10
 D) $5\sqrt{3}$ E) $10\sqrt{3}$

210. En una circunferencia está inscrito el cuadrilátero ABCD, tal que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son los lados de los polígonos regulares de 3, 6 y 12 lados, en el arco menor $\widehat{AB}$ se ubican los puntos M y N tal que los arcos $\widehat{AM}$, $\widehat{MN}$ y $\widehat{NB}$ son congruentes y en los arcos menores $\widehat{BC}$ y $\widehat{CD}$ se ubican los puntos medios P y Q . Calcule la medida del menor ángulo determinado por las cuerdas $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$.

- A) $26,5$ B) $32,5$ C) $38,5$
 D) $42,5$ E) $46,5$

Polígonos Regulares de 4 y 8 Lados

211. Un cuadrado ABCD de longitud de lado 5 u, está inscrito en una circunferencia, en $\overline{CD}$ se ubica el punto medio E , en el arco menor $\widehat{CD}$ se ubica el punto F y en la prolongación de $\overline{FE}$ se ubica el punto G , tal que $DF = 2(EF)$ y $GE = EF$. Calcule la longitud (en u) de $\overline{AG}$.

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 6 E) 7

212. En un octógono regular ABCDEFGH, en la diagonal $\overline{AE}$ se ubica el punto M tal que $\overline{BD} \cong \overline{DM}$. Calcule la medida del ángulo MBD.

- A) 22,5 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75

213. En un circunferencia cuyo radio mide R, está inscrito el triángulo ABC. Si $AB = R\sqrt{2}$ y $BC = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, entonces la longitud del lado $\overline{AC}$ es

- A) R B) $R(\sqrt{3} - 1)$
C) $R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ D) $R(\sqrt{5} + 1)$
E) $R(2 + \sqrt{2})$

214. En una circunferencia de centro D y diámetro $\overline{CE}$, se ubican los puntos M y D tal que $M \in \widehat{CP}$, las cuerdas $\overline{CM}$ y $\overline{MP}$ son los lados de dos polígonos regulares de 4 y 8 lados respectivamente y la prolongación de la cuerda $\overline{EP}$ es tangente en el punto T a la circunferencia que contiene a los puntos C y D. ¿Cuánto mide el ángulo MTE?

- A) 67,5 B) 78,75 C) 47,5
D) 62,25 E) 76,75

215. En un octógono regular ABCDEFGH, $FD = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ u. Calcule la longitud (en u) de $\overline{AD}$.

- A) $\sqrt{2} + 3$ B) $\sqrt{2} + 1$ C) $\sqrt{2} + 2$
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Polígonos Regulares de 5 y 10 lados

216. En un pentágono regular ABCDE inscrito en una circunferencia, Q es un punto del arco $\widehat{CD}$, tal que las medidas del arco $\widehat{CQ}$ y del ángulo EAQ son iguales. Si $AB = 4\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ u, entonces la longitud (en u) de la cuerda $\overline{BQ}$ es

- A) $6\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{5}$
D) $9\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{6}$

217. En un decágono regular ABCDEFGHIJ de centro O, la diagonal $\overline{AD}$ interseca a $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ en los puntos P y Q. Si $AQ = 4$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AP}$ es

- A) $(\sqrt{5} - 1)$ B) $2\sqrt{5} - 1$
C) $\frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)$ D) $2(\sqrt{5} - 1)$
E) $\frac{5}{2}(\sqrt{5} - 1)$

218. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

- I. Si ℓ_5 , ℓ_6 y ℓ_{10n} son las longitudes de los lados del pentágono, hexágono y decágono regular respectivamente, inscritos en una misma circunferencia, entonces $\ell_5^2 + \ell_{10}^2 = \ell_6^2$.
- II. La longitud del lado del decágono regular es igual a la longitud de la sección aurea del radio de la circunferencia circunscrita.
- III. El perímetro aproximado de un decágono regular, inscrito en una circunferencia cuyo radio mide R, es 6,18R.

- A) VFF B) VFV C) VVV
D) FVV E) FFF

219. En un pentágono regular ABCDE en $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos P y Q tal que $PQ = QE = 2$ u. Calcule la longitud (en u) de $\overline{PE}$.

- A) $\sqrt{5} - 1$ B) $2\sqrt{3} - 1$
C) $\sqrt{5} + 1$ D) $2(\sqrt{5} - 1)$
E) $\sqrt{10 - \sqrt{5}}$

220. En un triángulo ABC, los ángulos BAC y BCA miden 72 cada uno, se traza la bisectriz interior $\overline{AF}$ y en el triángulo AFC se traza la bisectriz interior $\overline{FJ}$. Calcular la razón entre $\overline{FJ}$ y $\overline{BF}$.

- A) $(\sqrt{5} - 1)$ B) 1
C) $\frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)$ D) $2(\sqrt{5} - 1)$
E) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

221. En un decágono regular ABCDEFGHIJ, en la diagonal $\overline{BF}$ se ubica el punto Q tal que QF es igual a la longitud de la sección áurea de $\overline{BQ}$. Si BQ es $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ u, entonces la longitud (en u) del lado del decágono regular es

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{5} + 1$ C) $\sqrt{3} - 1$
D) $\sqrt{5} - 1$ E) $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

222. En un triángulo ABC de circuncentro O, los ángulos BAC y BCA miden 36 y 24. Si $AC = 4(\sqrt{15} - \sqrt{3})$ u, entonces la distancia (en u) de O al lado $\overline{BC}$.

- A) 1 B) 2 C) 3

- D) 4 E) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

223. En una circunferencia se inscribe un pentágono regular ABCDE de longitud de lado ℓ . Calcule la distancia de A hacia la bisectriz del ángulo ECD.

- A) $\frac{\ell}{4}(3 + \sqrt{5})$ B) $\frac{\ell}{2}(3 - \sqrt{5})$
C) $\frac{\ell}{2}(3 + \sqrt{5})$ D) $\ell\sqrt{2 + \sqrt{5}}$
E) $\frac{\ell}{2}(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$

224. En un pentágono regular, la apotema mide a_5 y el radio de la circunferencia circunscrita mide R. Calcule la longitud de la apotema del decágono regular inscrito en la misma circunferencia.

- A) $\sqrt{Ra_5}$ B) $\sqrt{a_5(R + a_5)}$
C) $\sqrt{\frac{R(R + a_5)}{2}}$ D) $\frac{a_5 + R}{2}$
E) $\sqrt{\frac{3Ra_5}{2}}$

225. En un pentágono regular ABCDE, en la diagonal $\overline{AD}$ se ubica el punto F tal que $\overline{BF} \perp \overline{AC}$. Si $AB = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ u, entonces la distancia de F a $\overline{BC}$ es

- A) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
D) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ E) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Simetría en el Plano

226. En un triángulo ABC, el simétrico con respecto a la recta que contiene a la bisectriz interior $\overline{AD}$, es el triángulo $AB'C'$. Si $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$ ($a > c$), entonces la longitud de $\overline{B'C}$ es

- A) $\frac{b+c}{2}$ B) $b - c$ C) $\frac{b-c}{2}$
D) $\frac{b-c}{4}$ E) $\frac{a+b+c}{4}$

227. En un cuadrado ABCD cuyo lado mide 6 u, M es punto medio de $\overline{BC}$ y F es el simétrico de D respecto de la recta $\overline{AM}$. Calcule la longitud (en u) de $\overline{FB}$.

- A) $\sqrt{\frac{72}{5}}$ B) $\sqrt{\frac{115}{3}}$ C) $\sqrt{23}$
D) $\sqrt{\frac{109}{3}}$ E) $\sqrt{37}$

228. En un triángulo equilátero ABC, en el lado $\overline{AB}$ se ubica el punto medio M y el simétrico de ABC con respecto de la recta perpendicular al lado $\overline{BC}$ es el triángulo $A'B'C'$. Si $AB = 4$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{MB'}$ es

- A) $2\sqrt{13}$ B) $3\sqrt{13}$ C) $4\sqrt{13}$
D) $5\sqrt{13}$ E) $6\sqrt{13}$

229. Se tienen los hexágonos regulares ABCDEF y $A'B'C'D'E'F'$ simétricos con respecto a la recta $\overleftrightarrow{FD}$. Si $AB = 2$ u, entonces la distancia (en u) entre los puntos A y B' es

- A) $6\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{6}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{6}$

230. Los hexágonos regulares ABCDEF y $A'B'C'D'E'F'$ son simétricos respecto de O, siendo O un punto de $\overline{BE}$ tal que $BO = 3$ (OE). Si $AB = 4$ u, entonces el perímetro (en u) de $ABCC'B'A'$ es

- A) 28 B) 30 C) 32
D) 36 E) 40

231. En un cuadrado ABCD, en el lado $\overline{AD}$ y en la diagonal $\overline{BD}$ se ubican los puntos P y Q tal que $m\angle PQC = 90^\circ$, $QC = 25$ u y $PD = 17$ u. Calcule la medida aproximada del ángulo BCQ.

- A) 12 B) 14 C) 15
D) 16 E) 29

232. En un cuadrado ABCD, en el lado $\overline{AD}$ se ubica el centro O de una circunferencia tangente al lado $\overline{AB}$ en A e interseca a la diagonal $\overline{AC}$ en el punto Q. Si $AO = 4$ u y $OD = 2$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{QB}$ es

- A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4
D) $2\sqrt{5}$ E) 5

233. En un cuadrado ABCD, en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N tal que $\overline{AM} \cong \overline{NC}$, los vértices A y D son simétricos con respecto de la recta L que interseca a la circunferencia circunscrita al triángulo MBN en el punto P. Si la medida del arco $\widehat{MP}$ es 52, entonces la medida del ángulo NPC es

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

234. Dos circunferencias C_1 y C_2 son secantes en los puntos M y N, se traza la recta tangente común $\overleftrightarrow{AC}$ tal que $A \in C_1$ y $C \in C_2$, los puntos B y D son los simétricos de A y C con respecto de la recta determinada por los centros de C_1 y C_2 y M es el simétrico de D con respecto al centro O de C_2 . ¿Cuál es la medida aproximada del ángulo AOB?

- A) 74 B) 100 C) 106
D) 120 E) 135

235. En un triángulo ABC, B es el simétrico de C respecto al punto M, M es el simétrico de N respecto a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Si $\overline{NA} \cong \overline{AC}$ y $m\angle NAC = 90^\circ$, entonces la medida aproximada del ángulo BAC es

- A) $\frac{53}{2}$ B) $\frac{143}{2}$ C) $\frac{135}{2}$
D) $\frac{127}{2}$ E) $\frac{37}{2}$

Longitud de Circunferencia

236. En un cuadrado ABCD cuyo lado mide 8 cm, con centro en A se traza el arco $\widehat{BD}$. Calcule la longitud (en cm) de la circunferencia con centro en $\overline{CD}$, tangente al arco $\widehat{BD}$ y al lado $\overline{BC}$ en el vértice C.

- A) 3π B) 4π C) 5π
D) 6π E) 7π

237. En un pentágono regular ABCDE cuyo lado mide k, con centros en C y E se trazan dos arcos cuyos radios miden k intersectándose en T. Calcule la suma de las longitudes de los arcos $\widehat{TD}$ que se obtienen.

- A) $\frac{4k\pi}{5}$ B) $\frac{7k\pi}{8}$ C) $\frac{9k\pi}{10}$
D) $\frac{12k\pi}{17}$ E) $\frac{6k\pi}{7}$

238. En un triángulo ABC recto en B, los catetos miden 3 cm y 4 cm. Calcule la longitud (en cm) aproximada de la circunferencia tangente a los catetos y a la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

- A) $0,36\pi$ B) $0,34\pi$ C) $0,42\pi$
D) $0,48\pi$ E) $0,56\pi$

239. En un cuadrado cuyo lado mide k, haciendo centro en cada vértice y con radio de longitud k se trazan arcos interiores que al intersectarse determinan un cuadrilátero curvilíneo. Calcule el perímetro de dicho cuadrilátero curvilíneo.

- A) $\frac{k\pi}{5}$ B) $\frac{k\pi}{2}$ C) $\frac{k\pi}{3}$
D) $\frac{2k\pi}{3}$ E) $k\pi$

240. En una circunferencia, esta inscrito el hexágono regular ABCDEF y en el arco $\widehat{BC}$ se ubica el punto P tal que $PA = a$ y $PC = b$. Calcule la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es PE.

- A) $2(a+b)\pi$ B) $(a+b)\pi$
 C) $3(a+b)\pi$ D) $\frac{(a+b)\pi}{2}$
 E) $\frac{3(a+b)\pi}{4}$

Áreas de regiones poligonales

241. En un rectángulo ABCD, la recta L que sólo contiene al vértice B es perpendicular a la diagonal $\overline{BD}$, los vértices A y C distan de la recta L, 15 u y 10 u. ¿Cuál es el área (en u^2) de la región rectangular ABCD?

- A) $125\sqrt{6}$ B) 125 C) $25\sqrt{6}$
 D) $25\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{23}$

242. En un triángulo ABC, recto en B, la recta L es tangente a las circunferencias de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos P y Q, en el exterior del triángulo ABC se ubican los puntos S y T tal que PQST es un cuadrado. ¿Cuál es la razón de las áreas de las regiones poligonales ABC y PQST?

- A) 0,5 B) 1 C) 1,5
 D) 2 E) 2,5

243. En un rectángulo ABCD, la circunferencia de diámetro $\overline{AD}$ es tangente al lado $\overline{BC}$ en el punto Q tal que $\overline{QD}$ interseca a la diagonal $\overline{AC}$ en el punto T. Si $TB = \sqrt{17}$ u, entonces el área (en u^2) de la región rectangular ABCD es

- A) 36 B) 42 C) 44
 D) 48 E) 18

244. En un cuadrado ABCD, de centro O, en los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ se ubican los puntos M y N tal que el ángulo MON es recto. Si $CM = 1$ u y $AN = 3$ u, entonces el área (en u^2) de la región cuadrangular OMDN es

- A) 2 B) 4 C) 6
 D) 8 E) 12

245. En un rectángulo ABCD, la circunferencia inscrita al triángulo ADC es tangente a la diagonal $\overline{AC}$ en el punto T, en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N tal que MBNT es un rectángulo. Si $AB = 6$ u y $BC = 8$ u, entonces el área (en u^2) de la región rectangular MBNT es

- A) $\frac{144}{25}$ B) $\frac{169}{25}$ C) $\frac{288}{25}$
 D) $\frac{122}{25}$ E) $\frac{133}{25}$

Área de regiones triangulares

246. En una circunferencia, la prolongación de la cuerda $\overline{CB}$ y la recta tangente a la circunferencia en el punto A se intersecan en el punto P y en uno de los semiplanos determinados por $\overline{PC}$ se ubica el punto D tal que PBD es un triángulo equilátero. Si $AP = 4$ u, entonces el área (en u^2) del triángulo PCD es

- A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 6
 D) $8\sqrt{3}$ E) 10

247. En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, en el arco $\widehat{AB}$ se ubica el punto C tal que $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ y la cuerda $\overline{AR}$ interseca a $\overline{OC}$ y $\overline{BC}$ en los puntos P y Q. Si $(AP)(QR) = 16$ u^2 , entonces el área (en u^2) de la región triangular PQB es

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

248. Dos circunferencias congruentes C_1 y C_2 son tangentes exteriores en el punto T, la prolongación del diámetro $\overline{AC}$ de C_1 es tangente a C_2 en P y la prolongación de $\overline{PT}$ interseca a C_1 en B. Si $BP = 4\sqrt{3}$ u, entonces el área (en u^2) de la región triangular ATC es

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

249. En un triángulo ABC de incentro I, la circunferencia inscrita es tangente al lado $\overline{AC}$ en el punto M, por I se traza una recta paralela al lado $\overline{BC}$ que interseca a $\overline{MC}$ en el punto F. Si $AB = 17$ cm, $BC = 25$ cm y $AC = 28$ cm, entonces el área (en cm^2) de la región triangular IFM es

- A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

250. En un cuadrado ABCD de centro O, en la recta L que solo contiene al vértice D se ubican los puntos P y E tal que $\overline{AP} \perp L$ y $\overline{BE} \perp L$. Si $ED = 10$ u y $AP = 6$ u, entonces el área (en u^2) de la región triangular EOD es

- A) 22 B) 33 C) 44
D) 55 E) 66

251. En un triángulo ABC de incentro en I, se traza la altura $\overline{BH}$. Si $AB = 13$ u, $BC = 15$ u y $AC = 14$ u, entonces el área (en u^2) de la región triangular HIC es

- A) 9 B) 18 C) 24
D) 35 E) 48

252. Dos circunferencias C_1 y C_2 son tangentes exteriores en el punto Q, la prolongación del diámetro $\overline{AB}$ de C_1 es tangente a C_2 en el punto P. Si $PQ = a$ y $QB = b$, entonces el área de la región triangular PQB es

- A) $ab\sqrt{2}$ B) $\frac{ab}{2}$ C) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{ab\sqrt{2}}{6}$ E) $\frac{ab\sqrt{2}}{8}$

253. En un triángulo ABC las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ se intersecan en I tal que la suma de las áreas de las regiones triangulares AIE y CID es igual a $20 u^2$. Si $m\angle ABC = 60$, entonces el área (en u^2) de la región triangular AIC es

- A) 14 B) 16 C) 20
D) 24 E) 28

254. En un triángulo ABC, $AB = 13$ u, $BC = 14$ u y $AC = 15$. Si I es el incentro y G es el baricentro del triángulo ABC, entonces el área (en u^2) de la región IAG es

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) $\frac{4}{3}$

255. En un triángulo ABC, las alturas miden 12 u, 15 u y 20 u. Calcule el área (en u^2) de la región triangular ABC.

- A) 120 B) 130 C) 140
D) 150 E) 160

256. Los lados de un triángulo miden 10 u, 12 u y 14 u. Calcule la longitud (en u) del inradio del triángulo.

- A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
D) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{5\sqrt{6}}{4}$

Relación de áreas

257. En un triángulo ABC, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{CM}$ las cuales se intersectan en el punto R. Si $HC = 2(AH)$, entonces la razón de las áreas de las regiones triangulares AMR y BRC es

- A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{9}$

258. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos M y N respectivamente. Si $AB = 8$ cm y $BC = 15$ cm, entonces el área (en cm^2) de la región triangular MNC es

- A) $\frac{400}{11}$ B) $\frac{500}{19}$ C) $\frac{576}{17}$
D) $\frac{580}{19}$ E) $\frac{600}{13}$

259. En un triángulo ABC, se trazan la mediana $\overline{AE}$ y la ceviana $\overline{BD}$, las cuales se intersectan en el punto R. Si $AD = 3(DC)$, entonces la razón de las áreas de las regiones triangulares EBR y ABR es

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$

- D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

260. En un cuadrilátero bicéntrico ABCD, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ y $AD = d$. Calcule el área de la región triangular ABD.

- A) $\frac{ad\sqrt{abcd}}{ad+bc}$ B) $\frac{bc\sqrt{abcd}}{ad+bc}$
C) $\frac{ab\sqrt{abcd}}{ab+cd}$ D) $\frac{a\sqrt{abcd}}{b+c}$
E) $\frac{b\sqrt{abcd}}{c+d}$

261. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia, el punto P pertenece al arco menor $\widehat{BC}$. Si $BP = a$ y $PC = b$, entonces la razón de áreas de las regiones triangulares BPA y APC es

- A) $\frac{a+b}{b}$ B) $\frac{a}{b}$ C) $\frac{a}{a+b}$
D) $\frac{a}{a+2b}$ E) $\frac{b}{a+3b}$

262. En un triángulo ABC, el ángulo ABC mide 120° , la bisectriz exterior $\overline{CE}$ y la prolongación de la bisectriz $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ se intersectan en P tal que la diferencia de las áreas de las regiones triangulares APE y CPD son es igual a 12 u^2 . ¿Cuál es el área (en u^2) de la región triangular APC?

- A) 4 B) 6 C) 8
D) 9 E) 12

263. En un triángulo ABC de incentro I, en $\overline{AC}$ se ubican los puntos P y Q tal que $\overline{PI} \parallel \overline{AB}$, $\overline{IQ} \parallel \overline{BC}$, $AB + BC = 2(AC)$ y el área de la región triangular ABC es 36 u^2 . Calcule el área (en u^2) de la región triangular PIQ.

- A) 4 B) 6 C) 9
D) 12 E) 18

264. Sea la circunferencia de centro O inscrita en el triángulo ABC los puntos P y Q pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tal que $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{AC}$. Si $AB = 30$ u, $BC = 14$ u y $AC = 40$ u, entonces, el área (en u^2) de la región triangular PBQ es ($\overline{PQ}$ es tangente)

- A) $\frac{2}{21}$ B) $\frac{4}{21}$ C) $\frac{5}{21}$
D) $\frac{8}{21}$ E) $\frac{10}{21}$

265. En un triángulo ABC recto en B de incentro I, las rectas $\overline{AI}$ y $\overline{CI}$ intersecan a la circunferencia circunscrita en los puntos P y Q respectivamente. Calcule la razón de las áreas de las regiones triangulares PBQ y AIC.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

266. En un cuadrilátero convexo ABCD, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica el punto H tal que $CH \perp \overline{AD}$ y $m\angle BAD = m\angle CDH$. Si $AD = 8$ u y $CH = 3$ u, entonces el área (en u^2) de la región triangular BCD es

- A) 6 B) 12 C) 16
D) 24 E) 32

267. En un triángulo ABC, la mediana $\overline{AM}$ y la ceviana $\overline{BP}$ se intersecan en el punto Q. Si las áreas de las regiones AQB y AQP son 19 m^2 y 7 m^2 , entonces el área (en m^2) de la región PQC es

- A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

268. En un triángulo ABC, en las prolongaciones de los lados $\overline{BA}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ se ubican los puntos P, Q y R tal que $AP = AB$, $AC = CQ$ y $BC = BR$. Si el área de la región triangular ABC es S, entonces el área de la región triangular PQR es

- A) 7S B) 6S C) 8S
D) 9S E) 10S

269. En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$. Si $AC = b$, $PQ = a$ y el área de la región triangular es S, entonces el área de la región PBQ es

- A) $\frac{a^2}{b^2}S$ B) $\frac{a}{b}S$
C) $\left(\frac{ab}{a+b}\right)S$ D) $\frac{b^2+a^2}{ab}S$
E) $\sqrt{ab}S$

270. En el triángulo ABC, en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{AC}$. Si $AC = L$ y las regiones PBQ y APQC son equivalentes, entonces la longitud de $\overline{PQ}$ es

- A) $\frac{L\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{L\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{L\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{L}{4}$ E) $\frac{L}{2}$

271. En un triángulo ABC, en los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P y Q tal que $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ se intersecan en el punto R. Si $BP = PC$, $AQ = 2(QC)$ y el área de la región

triangular ABC es S, entonces el área de la región triangular BPR es

- A) $S/10$ B) $S/12$ C) $S/15$
D) $S/18$ E) $S/21$

Área de regiones cuadrangulares

272. En un paralelogramo ABCD, en las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos P y R, en las prolongaciones de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se ubican los puntos L y N tal que PCRQ y MCLN son cuadrados que determinan regiones cuadradas de áreas $36u^2$ y $25u^2$. Si $(AB)(BC) = 40 u^2$, entonces el área (en u^2) de la región paralelogramática ABCD es

- A) $20\sqrt{3}$ B) 45 C) 48
D) $25\sqrt{3}$ E) $10\sqrt{3}$

273. En un trapecio ABCD, las bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ miden 15 u y 27 u respectivamente, sobre el lado $\overline{AD}$ se ubica el punto P, tal que $\overline{PC}$ determina en la región trapecial dos regiones equivalentes. Calcule la longitud (en u) de $\overline{AP}$.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 4,4 E) 6

274. En un triángulo ABC recto en B, en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos medios M y N, y en el lado $\overline{AC}$ se ubican los puntos R y H tal que A – R – H y el área de la región cuadrangular RMNH es la mitad del área de la región triangular ABC. Calcule la razón entre $\overline{RH}$ y $\overline{MN}$.

- A) 0,25 B) 0,50 C) 0,75
D) 1 E) 1,25

275. En un trapecio isósceles, las bases miden 4u y 16u, y es circunscrito a una

circunferencia. Calcule el área (en u^2) de la región trapecial.

- A) 80 B) 50 C) 70
D) 60 E) 40

276. En un paralelogramo ABCD, en el exterior se ubica el punto P tal que $\overline{BP}$ interseca a $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ en los puntos Q y M, $\overline{AP}$ interseca a $\overline{CD}$ en el punto L y $\overline{DP} // \overline{AC}$. Si las áreas de las regiones triangulares MPC, QBC y LPD son S_1 , S_2 y S_3 , entonces el área de la región cuadrangular AQML es

- A) $S_1 + S_2 + S_3$ B) $S_1 + 2S_2 + S_3$
C) $2S_1 + S_2 + S_3$ D) $S_1 + S_2 + 2S_3$
E) $2S_1 + S_2 + 3S_3$

277. Dado un paralelogramo ABCD, una circunferencia, cuyo radio mide R, es tangente a $\overline{AD}$ en D y contiene a B. Calcule el máximo valor del área de la región paralelogramática.

- A) $\sqrt{3}R^2$ B) $\frac{1}{2}\sqrt{3}R^2$
C) $\frac{1}{2}\sqrt{5}R^2$ D) $\frac{3}{2}\sqrt{3}R^2$
E) $\frac{5}{2}\sqrt{3}R^2$

278. Dos circunferencias C_1 y C_2 cuyos radios miden 4 u y 9 u son tangentes exteriores en el punto D, en C_1 y C_2 se ubican los puntos A y T tal que $\overline{AT}$ es una recta tangente común exterior, B es centro de C_2 y $\overline{AC}$ es diámetro de C_2 . ¿Cuál es el área (en u^2) de la región cuadrangular no convexa ABDC?

- A) 16 B) $16\frac{8}{13}$ C) $31\frac{5}{13}$



D) $33\frac{3}{13}$ E) 64

279. En una circunferencia cuyo radio mide R , en los radios perpendiculares $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ se ubican los puntos A y D , en el arco menor $\widehat{MN}$ se ubican los puntos B y C tal que $ABCD$ es un rectángulo y el arco $\widehat{BC}$ mide 53° . Calcule el área de la región rectangular $ABCD$.

- A) $\frac{1}{5}R^2$ B) $\frac{2}{5}R^2$ C) $\frac{3}{5}R^2$
D) R^2 E) $2R^2$

280. Se tiene el cuadrilátero $ABCD$, donde $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, en $\overline{CD}$ se ubican los puntos M y N , tal que $CM = ND$. Si $\overline{AM} \cap \overline{BN} = \{P\}$ y las respectivas áreas de las regiones ABP , BCM , MNP y AND , son S_1 , S_2 , S_3 y S_4 , entonces se cumple:

- A) $S_4 = S_1 + S_2 + S_3$
B) $S_1 - S_4 = S_2 + 2S_3$
C) $S_2 = S_1 + S_3 - S_4$
D) $S_1 = S_2 + S_3 + S_4$
E) $S_1 = S_2 - S_3 - S_4$

281. En una circunferencia cuyo radio mide R , desde un punto C exterior, se trazan las rectas tangentes a la circunferencia en los puntos A y B tal que el ortocentro del triángulo ABC es un punto de la circunferencia. Calcule el área de la región cuadrangular no convexa $ABHC$.

- A) $\frac{1}{2}\sqrt{3}R^2$ B) $\frac{1}{2}\sqrt{5}R^2$
C) $\sqrt{3}R^2$ D) $\frac{3}{2}\sqrt{3}R^2$
E) $2\sqrt{3}R^2$

282. En un rectángulo $ABCD$, en las prolongaciones de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos P y Q tal que $PDQE$ es un cuadrado siendo el punto E el excentro del triángulo ABC que determina una región de área 6 u^2 . ¿Calcule el área (en u^2) de la región cuadrada $PDQE$?

- A) 6 B) 8 C) 12
D) 14 E) 15

283. En un triángulo ABC recto en B , se traza el cuadrado $ACDE$, en el lado $\overline{BC}$ y en la prolongación de lado $\overline{BA}$ se ubican los puntos F y G tal que $\overline{EF} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DG} \perp \overline{AB}$. Si $AB + BC = 4 \text{ u}$, entonces el área (en u^2) de la región cuadrangular $EDFG$ es

- A) 4 B) 8 C) 12
D) 16 E) 24

284. En un cuadrilátero convexo $ABCD$, en las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se ubican los puntos E , F , G y H tal que $AB = BE$, $BC = CF$, $CD = DG$ y $DA = AH$. Si el área de la región cuadrangular $ABCD$ es 20 u^2 , entonces el área (en u^2) de la región cuadrangular $EFGH$ es

- A) 40 B) 80 C) 100
D) 120 E) 150

285. En un rombo $ABCD$, se traza la altura $\overline{BH}$ tal que $H-A-D$. Si $HD = 2(HB) = 16 \text{ u}$, entonces el producto de las longitudes (en u^2) de sus diagonales es

- A) 80 B) 140 C) 160
D) 180 E) 200

286. En un trapecio la mediana determina dos regiones cuadrangulares cuya razón de áreas es $\frac{3}{5}$. ¿Cuál es la razón entre las bases?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{7}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{9}$

Área de regiones circulares

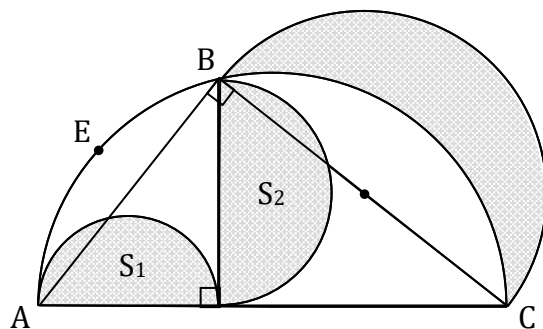
287. En un cuadrado ABCD cuyo lado mide 6 u, en el lado $\overline{CD}$ se ubica el punto medio M, la diagonal $\overline{BD}$ interseca al arco de circunferencia de centro D y radio $\overline{AD}$ en el punto P y a $\overline{AM}$ en Q. Calcule el área (en u^2) de la región mixtilínea APQ.

- A) $\frac{1}{2}(\pi - 3)$ B) $\frac{3}{2}(\pi - 3)$
C) $(3\pi - 4)$ D) $\frac{3}{2}(3\pi - 4)$
E) $2(3\pi - 4)$

288. En un triángulo ABC recto en B, se traza exteriormente una semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$ y en el arco $\widehat{BC}$ se ubica el punto medio M. Si $BC = 2(AB) = 8$ u, entonces el área (en u^2) de la región determinada por $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ y el arco $\widehat{BM}$ es

- A) 3π B) $3,5\pi$ C) 4π
D) $4,5\pi$ E) 5π

289. En la figura se muestran cuatro semicircunferencias tal que el área de la región triangular mixtilínea AEBC es $40 u^2$ y el área de la lúnula es $10 u^2$. Determine la suma de las áreas (en u^2) de S_1 y S_2 .



- A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 60

290. En un trapecio circular ABCD el ángulo central correspondiente mide 120° , en el arco AB se ubica el punto P tal que los ángulos ADP y PCB son suplementarios y $\overline{PC}$ se interseca con el arco CD en Q. Si $PD = a$ y $PC = b$, entonces el área del trapecio circular ABCD es

- A) $\frac{ab\pi}{2}$ B) $\frac{ab\pi}{3}$ C) $ab\pi$
D) $\frac{2ab\pi}{3}$ E) $\frac{3ab\pi}{4}$

291. En un sector circular, el perímetro es igual a 48 cm. Si el área del sector es máxima, entonces la longitud (en cm) del radio es

- A) 16 B) 24 C) 12
D) 10 E) 15

292. En una circunferencia se trazan los radios perpendiculares $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$. En el arco menor AB se ubican los puntos P y Q, tal que los ángulos AOP y BOQ miden 27° . Los puntos M y N son las proyecciones de los puntos P y Q sobre $\overline{OB}$. Si el área del círculo es igual a 100 cm^2 , entonces el área (en cm^2) de la

región limitada por el arco menor $\overline{PQ}$, $\overline{PM}$, $\overline{QN}$ y $\overline{MN}$ es

- A) 20 B) 25 C) 18
D) 16 E) 10

293. En una circunferencia se inscribe el trapecio ABCD, tal que $\overline{AD}$ es diámetro y el ángulo BAC mide 24° . Si el área del círculo es igual a 90 cm^2 , entonces el área (en cm^2) de la región limitada por el arco menor BC, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es

- A) 10 B) 12 C) 15
D) 16 E) 18

294. Dos circunferencias congruentes C_1 y C_2 , de centros P y Q, son secantes, tal que P y Q pertenecen a C_2 y C_1 respectivamente. Si $PQ = 2\sqrt{3} \text{ cm}$, entonces el área (en cm^2) de la región común a los dos círculos es

- A) $8\pi - 6\sqrt{3}$ B) $9\pi - 8\sqrt{3}$
C) $4\pi + 2\sqrt{3}$ D) $2\pi + 6\sqrt{3}$
E) $12\pi - 8\sqrt{3}$

295. En un triángulo equilátero ABC, el perímetro es igual a 12 cm. Calcule el área (en cm^2) de la región común a los tres círculos, cuyos diámetros son los lados del triángulo.

- A) $2(\pi - \sqrt{3})$ B) $4(\pi - \sqrt{3})$
C) $2(3\pi - 2\sqrt{3})$ D) $3(\pi - \sqrt{3})$
E) $2(2\pi - \sqrt{3})$

Lúnulas de Hipócrates

296. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, se traza la cuerda

$\overline{MN} \parallel \overline{AB}$. Con diámetro $\overline{MN}$ se dibuja una circunferencia tangente a $\overline{AB}$ en el punto O. Si $OM = R$, entonces el área de la lúnula determinada por los arcos de circunferencia es

- A) $\frac{R^2}{3}$ B) $\frac{R^2}{2}$ C) $\frac{2R^2}{3}$
D) $\frac{4R^2}{3}$ E) $\frac{3R^2}{2}$

297. En un triángulo ABC, recto en B, considerando los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ como diámetros se trazan las circunferencias C_1 y C_2 , que se intersecan en el punto M. Luego se traza la semicircunferencia C_3 de diámetro $\overline{AC}$, exterior al triángulo ABC. Si S_1 es el área de la región limitada por C_1 y C_2 , y S_2 es el área de la región limitada por C_1 , C_2 y C_3 , entonces el área de la región triangular ABC es

- A) $2S_2 - 3S_1$ B) $S_2 - 2S_1$
C) $S_2 - S_1$ D) $2(S_2 - S_1)$
E) $2S_2 - S_1$

298. En un hexágono regular ABCDEF inscrito en una circunferencia; con diámetros $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$ se trazan exteriormente cuatro semicircunferencias. Calcule la razón entre la suma de las áreas de las cuatro lúnulas determinadas y el área de la región hexagonal regular.

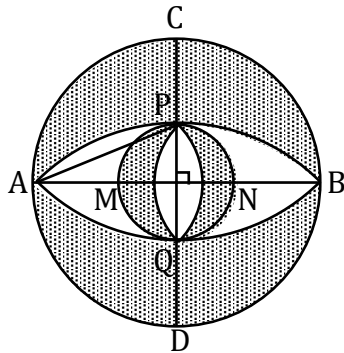
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{5}$

299. En un cuadrado ABCD, con diámetro $\overline{BD}$ se traza la semicircunferencia C_1 , que determina una lúnula con el arco BD de

centro A. Si el área de la región cuadrangular es S, entonces el área de la región que determina la lúnula es

- A) $\frac{S}{3}$ B) $\frac{2S}{3}$ C) $\frac{S}{2}$
D) $\frac{3S}{5}$ E) $\frac{3S}{5}$

- 300.** En la figura se muestran dos circunferencias concéntricas, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros, C y D son centros de los arcos AB, M y N son centros de los arcos PQ, P y Q son puntos de tangencia. Si $AP = 6$ u, entonces la suma de áreas (en u^2) de las lúnulas es



- A) 36 B) 48 C) 54
D) 72 E) 108